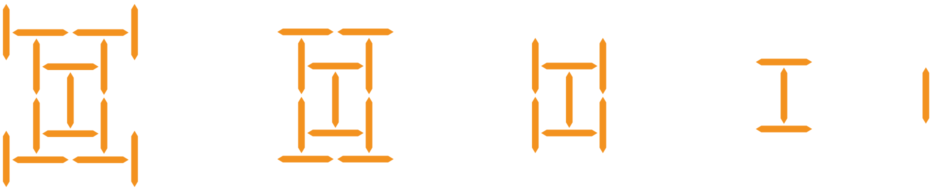


[redacted]

ریاضی میں پیٹرن
(Patterns in Mathematics)

1

1.1 ریاضی کیا ہے؟

ریاضی درحقیقت وسیع پیمانے پر پیٹرنوں کی تلاش اور ان پیٹرنوں کے وجود کی وضاحت پر مشتمل ہے۔

قدرت میں، ہمارے گھروں میں اور اسکولوں میں، سورج، چاند اور ستاروں کی حرکت میں، بلاشبہ ہمارے اردگرد پیٹرن موجود ہوتے ہیں۔ یہ پیٹرن ہمیں خریداری سے لے کر کھانا بنانے میں، گیند پھینکنے سے لے کر کھیلنے تک میں نظر آتے ہیں۔ نیز یہ موسم کے پیٹرن کو سمجھنے سے ٹکنالوجی کے استعمال کرنے میں ہماری مدد کرتے ہیں۔

پیٹرنوں کی تلاش اور ان کی وضاحت دل چسپ اور تخلیقی عمل ہو سکتا ہے۔ اسی وجہ سے ریاضی داں، ریاضی کو فن اور سائنس دونوں طرح سے دیکھتے ہیں۔ ہمیں امید ہے کہ اس سال آپ کو ریاضی کے پیٹرن میں شامل منطقی اور تخلیقی خوب صورتی کو دیکھنے کا موقع ملے گا۔

یہ دھیان رکھنا ضروری ہے کہ ریاضی کا مقصد صرف یہ معلوم کرنا نہیں ہے کہ کون سے پیٹرن موجود ہیں، بلکہ اس کی وضاحت کرنا بھی ہے کہ پیٹرن کا وجود کیوں ہے۔ ایسی وضاحتیں اکثر اس سیاق سے کہیں آگے مختلف اطلاقی صلاحیتوں میں استعمال کی جا سکتی ہیں جس میں انھیں دریافت کیا گیا تھا اور یہ انسانیت کو آگے بڑھانے میں مددگار ثابت ہو سکتی ہیں۔

مثال کے طور پر، ستاروں، سیاروں اور ان کے سیٹلائٹوں کی حرکت میں پیٹرن کی فہم نے کشش کے نظریے کی نشوونما میں انسانوں کی راہنمائی کی، جس کی بدولت ہم نے راکٹ اور سٹیلائٹ کو چاند اور مریخ پر بھیجنے میں کامیابی حاصل کی؛ اسی طرح لونی مادے (Genomes) میں پیٹرنوں کی فہم سے بیماریوں کی تشخیص اور علاج میں مدد ملی ــــ یہ اس طرح کی ہزاروں مثالوں میں سے ایک ہے۔

© NCERT not to be republished

معلوم کیجیے

1. کیا آپ ایسی مثالیں سوچ سکتے ہیں جہاں ریاضی ہماری روزمرہ زندگی میں مددگار ہو؟

2. ریاضی انسانیت کو کیسے فروغ دیتی ہے؟ (آپ ایسی مثالیں سوچ سکتے ہیں جیسے کہ سائنسی تجربات انجام دینا، ہماری جمہوریت (Democracy) اور معیشت (Economy) کو چلانا، گھر اور دوسری پیچیدہ عمارتوں کی تعمیر، ٹی وی، موبائل، کمپیوٹر، سائیکل، ٹرین، کار، ہوائی جہاز، کیلنڈر، گھڑیاں وغیرہ بنانا)۔

ریاضی بات چیت

1.2 اعداد میں پیٹرن

ریاضی میں بنیادی طور پر جو پیٹرن نظر آتے ہیں ان میں عددی پیٹرن شامل ہیں، خاص طور پر مکمل اعداد کے پیٹرن:

0,1,2,3,4,...

ریاضی کا وہ شعبہ جس میں مکمل اعداد کے پیٹرن کا مطالعہ کیا جاتا ہے اسے عددی نظریہ (Number theory) کہتے ہیں۔

عددی تواتر (Number sequences) کا شمار سب سے بنیادی اور دلکش قسم کے پیٹرن میں ہوتا ہے جس کا مطالعہ ریاضی داں کرتے ہیں۔

جدول 1 میں کچھ اہم عددی تواتر دکھائے گئے ہیں جن کا مطالعہ ریاضی میں کیا گیا ہے۔

جدول 1 : عددی تواتر کی مثالیں

سبھی اکائیاں (All 1s)	1,1,1,1,1,1,1,...
طبعی اعداد (Counting Numbers)	1,2,3,4,5,6,7,...
طاق اعداد (Odd Numbers)	7,9,11,13, 5, 1,3,...
جفت اعداد (Even Numbers)	2,4,6,8,10,12,14,...
مثلثی اعداد (Triangular Numbers)	1,3,6,10,15,21,28,...

© NCERT not to be republished

مربع اعداد (Squares)	1,4,9,16,25,36,49,...
مکعب اعداد (Cubes)	1,8,27,64,125,216,...
ورہانکا اعداد (Virahanka Numbers)	1,2,3,5,8,13,21,...
دو کے پاور والے اعداد (Power of 2)	1,2,4,8,16,32,64,...
تین کے پاور والے اعداد (Power of 3)	1,3,9,27,81,243,729,...

معلوم کیجیے

ریاضی بات چیت

1. کیا آپ جدول نمبر 1 میں موجود ہر ایک تواتر میں پیٹرن کی پہچان کر سکتے ہیں؟
2. جدول 1 میں دیے گئے ہر ایک عددی تواتر کو اپنی کاپی میں دوبارہ لکھیے اور ہر تواتر کے اگلے تین اعداد کو بھی شامل کیجیے اور اس کے اصول کی وضاحت اپنی زبان میں کیجیے۔

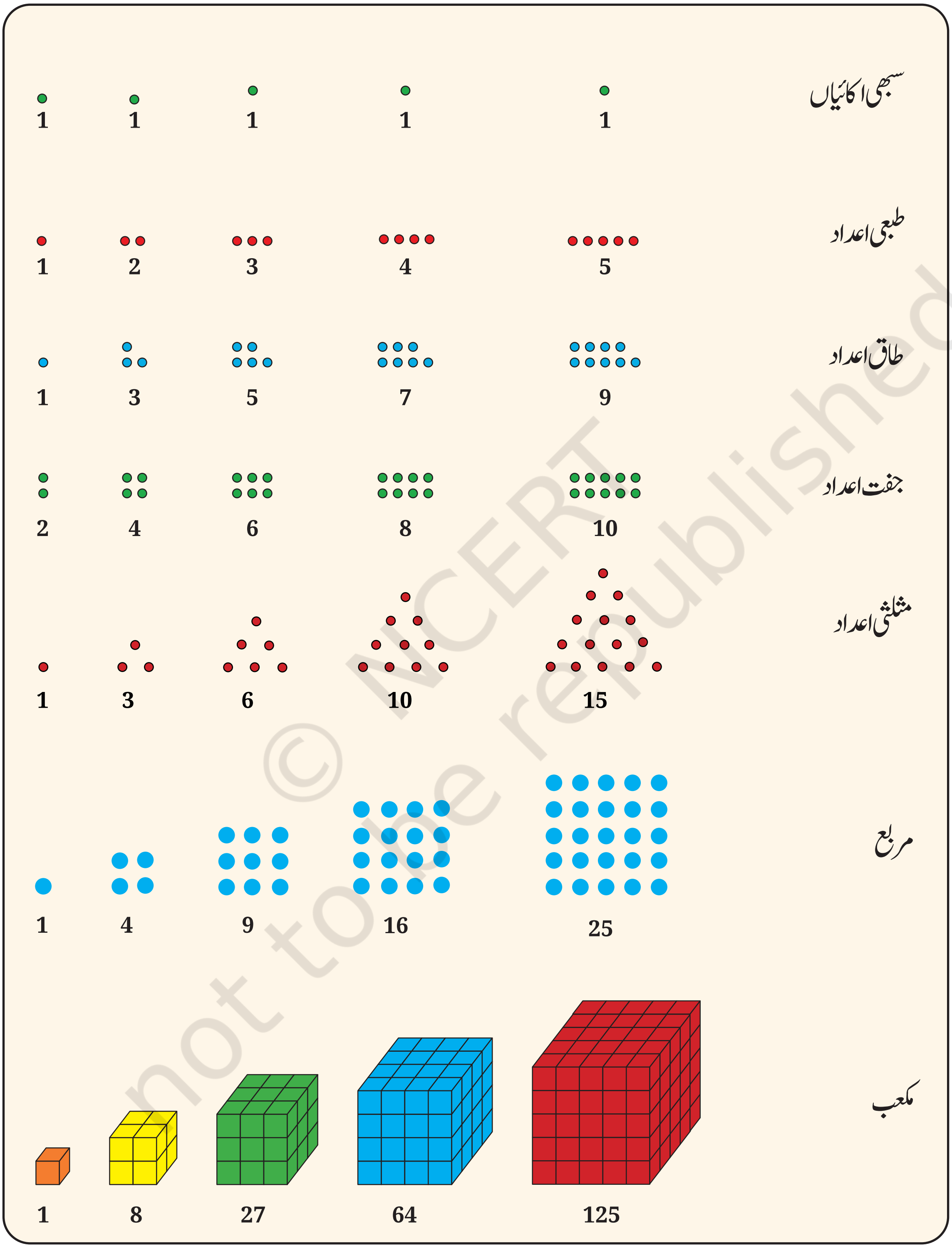
1.3 عددی تواتر کا تصور

تصاویر کے ذریعے ہم بہت سارے عددی تواتر کو دکھا سکتے ہیں۔ ریاضی اشیا کو تصاویر یا ڈائی گرام کے ذریعے دکھانا ریاضی کے پیٹرن اور تصورات کو سمجھنے کا ایک بہت ہی مفید طریقہ ہو سکتا ہے۔

آیئے ہم جدول 1 میں پہلے سات عددی تواتر کو مندرجہ ذیل تصاویر کے ذریعے پیش کرتے ہیں۔

© NCERT not to be republished

جدول 2 : کچھ عددی تواتر کا تصویری اظہار

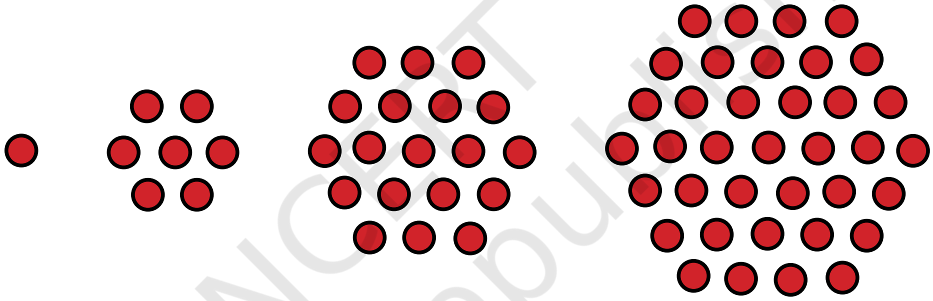


© NCERT not to be republished

معلوم کیجیے

ریاضی بات چیت

1. جدول نمبر 2 سے تصویری اظہار کو اپنی کاپی میں درج کیجیے اور ہر پیٹرن کے لیے اگلی تصویر بنائیے!
2. 1، 3، 6، 10، 15، ... کو مثلثی اعداد کیوں کہتے ہیں؟ 1، 4، 9، 16، 25، ... کو مربع اعداد یا مربع کیوں کہتے ہیں؟ 1، 8، 27، 64، 125، .... کو مکعب کیوں کہتے ہیں؟
3. آپ غور کرنے سے پائیں گے کہ 36 ایک ایسا عدد ہے جو مثلثی عدد اور مربع دونوں ہے! اس کا مطلب ہے کہ 36 نقطوں کو مکمل طور پر مثلث اور مربع دونوں میں ترتیب دیا جاسکتا ہے۔ اس کی وضاحتی تصویر بنائیے!
4. آپ نیچے دیے گئے عددی تواتر کو کیا کہیں گے؟

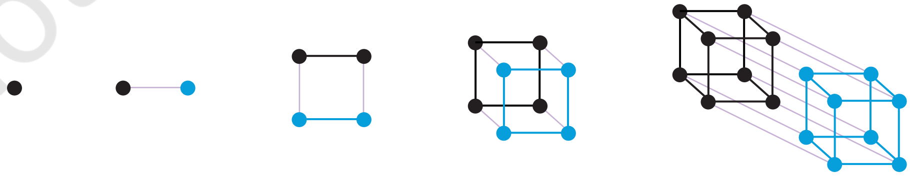


1 7 19 37

انھیں مسدسی اعداد کہتے ہیں! انھیں اپنی کاپی میں بنائیے۔ اس تواتر میں اگلا عدد کیا ہوگا؟

5. کیا آپ 2 کے پاوروں اور 3 کے پاوروں والے تواتر کو تصویروں کے ذریعے دیکھنے کے بارے میں سوچ سکتے ہیں؟

یہاں پر 2 کے پاوروں کے بارے میں سوچنے کا ایک ممکنہ طریقہ ہے:



1 2 4 8 16

© NCERT not to be republished

1.4 عددی تواتر کے درمیان رشتہ

کبھی کبھی عددی تواتر ایک دوسرے سے حیرت انگیز طریقوں سے جُڑے ہو سکتے ہیں۔

مثال : جب ہم طاق اعداد کو جوڑنا شروع کرتے ہیں تو کیا ہوتا ہے؟

1 = 1
1 + 3 = 4
1 + 3 + 5 = 9
1 + 3 + 5 + 7 = 16
1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25
1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36
⋮

یہ واقعی ایک خوب صورت پیٹرن ہے!

- ایسا کیوں ہوتا ہے؟ کیا آپ کو لگتا ہے کہ ایسا ہمیشہ ہوگا؟

اس کا جواب یہ ہے کہ پیٹرن ہمیشہ واقع ہوتا رہتا ہے، مگر کیوں؟ جیسا کہ پہلے ذکر کیا گیا ہے کہ پیٹرن کیوں واقع ہوتا ہے۔ اس کی وجہ اتنی ہی خاص اور دل چسپ ہے جتنا کہ خود پیٹرن۔

ایک تصویر اسے واضح کر سکتی ہے

کسی تصویر کے تصور کی مدد سے اس عمل کی تشریح ہو سکتی ہے۔ یاد کیجیے کہ مربع اعداد کو مربع ڈاٹ گرڈ کی گنتی کے ذریعے بنایا جاتا ہے۔

ریاضی بات چیت

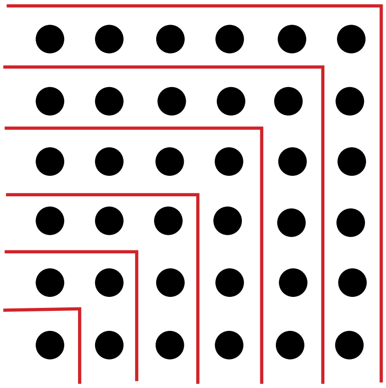
- ہم مربع گرڈ کے نقطوں کو کس طرح تقسیم دے کر طاق اعداد کے نقطوں کی شکل دے سکتے ہیں:

1، 3، 5، 7،...؟

آگے مطالعہ کرنے سے پہلے تھوڑا اس کے بارے میں سوچیے!

© NCERT not to be republished

ذیل میں دیے گئے پیٹرن میں دکھایا گیا ہے کہ یہ کس طرح کیا جا سکتا ہے:



اس تصویر سے یہ واضح ہو جاتا ہے کہ

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36.$$

چوں کہ یہ اسی طرح کی تصویر کسی بھی سائز کے مربع میں بنائی جا سکتی ہے اور یہ واضح کرتا ہے کہ طاق اعداد کی جمع سے مربع اعداد کیوں حاصل ہوتے ہیں۔

- اسی طرح کی تصویر بنا کر کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ پہلے 10 طاق اعداد کا مجموعہ کیا ہے؟
- اب ایک ایسی ہی تصویر کا تصور کر کے یا حسب ضرورت جزوی طور پر بنا کر کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ پہلے 100 طاق اعداد کا مجموعہ کیا ہے؟

تواتر کے درمیان اوپر دیے ہوئے رابطے کی طرح کی دوسری مثال:

اوپر اور نیچے جمع کرنا

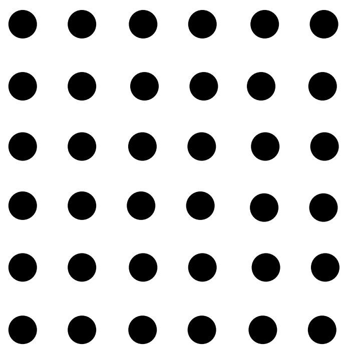
آیئے ذیلی پیٹرن کو دیکھتے ہیں:

$$1 = 1$$
$$1 + 2 + 1 = 4$$
$$1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 9$$
$$1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 16$$
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 25$$
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$$
$$\vdots$$

دیے گئے پیٹرن کو دیکھ کر ایسا لگتا ہے کہ گنتی والے اعداد کو اوپر اور پھر نیچے جوڑنا مربع اعداد حاصل کرنے کا ایک دوسرا طریقہ ہے!

© NCERT not to be republished

کیا آپ ذیل میں دیے گئے گرڈ نقطوں سے اسی طرح دوسرے تصویری اظہار کی تلاش کر سکتے ہیں؟



معلوم کیجیے

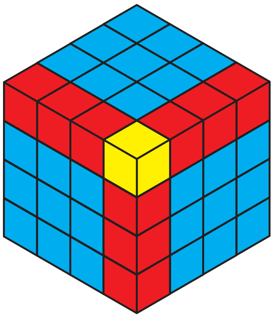
کوشش کیجیے

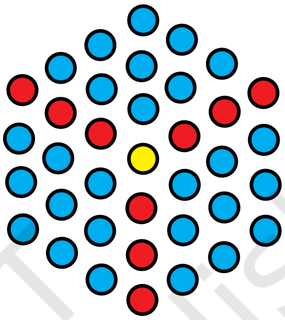
1. کیا آپ کوئی ایسا تصویری اظہار تلاش کر سکتے ہیں جس سے یہ واضح ہو کہ اعداد، مثلاً 1، 1+2+1، 1+2+3+2+1، ... کو اوپر اور نیچے جوڑا جائے تو اس کا نتیجہ مربع اعداد کیوں ہوتا ہے؟
2. بڑی سائز کی تصویر کا بڑے پیمانے پر تصور کر کے، یا اسے ضرورت کے مطابق جزوی طور پر بنا کر، کیا آپ دیکھ سکتے ہیں کہ 1 + 2 + 3 + ... + 99 + 100 + 99 ... + 3 + 2 + 1 کی قدر (Value) کیا ہوگی؟
3. سبھی اکائی والے تواتر کو اوپر جمع کرنے کے بعد آپ کو کون سا تواتر حاصل ہوتا ہے؟ سبھی اکائی والے تواتر کو نیچے جمع کرنے کے بعد آپ کو کون سا تواتر حاصل ہوتا ہے؟
4. طبعی اعداد کو اوپر کی طرف جمع کرنے کے بعد آپ کو کون سا تواتر حاصل ہوتا ہے؟ کیا آپ ایک مختصر تصویری اظہار دے سکتے ہیں؟
5. جب آپ متواتر مثلث اعداد کے جوڑوں کو جمع کرتے ہیں تو کیا واقع ہوتا ہے؟ یعنی، 1+3، 3+6، 6+10، 10 + 15... کو لیجیے۔ آپ کو کون سا تواتر حاصل ہوتا ہے؟ کیوں؟ کیا آپ اس کی وضاحت تصویر کے ذریعے کر سکتے ہیں۔
6. جب آپ 1 سے شروع کرتے ہوئے 2 کے پاور والے اعداد کو جمع کرتے ہیں، یعنی، 1، 1+2، 1+2+4، 1+2+4+8... تو کیا واقع ہوتا ہے؟ اب آپ ان میں سے ہر عدد میں 1 جمع کیجیے — آپ کو کون سے اعداد حاصل ہوتے ہیں؟ ایسا کیوں واقع ہوتا ہے؟

© NCERT not to be republished

7. جب آپ مثلثی اعداد کو 6 سے ضرب کرنے کے بعد اس میں 1 جمع کرتے ہیں تو کیا واقع ہوتا ہے؟ آپ کو کون سا تواتر حاصل ہوتا ہے؟ کیا آپ تصویر کے ذریعے اس کی وضاحت کر سکتے ہیں؟

8. جب آپ مسدسی اعداد، مثلاً…1، 1+7، 1+7+19، 1+7+19+37 کو جمع کرنا شروع کرتے ہیں تو کیا واقع ہوتا ہے؟ آپ کو کون سا تواتر حاصل ہوتا ہے؟ کیا آپ تصویر کے ذریعے اس کی وضاحت کر سکتے ہیں؟





9. جدول 1 میں دیے گئے تواتروں میں خود کے پیٹرن اور ان کے درمیان کے روابط کو تلاش کیجیے۔ کیا آپ تصویر یا کسی اور طریقے سے انھیں واضح کر سکتے ہیں کہ ایسا کیوں واقع ہوتا ہے؟

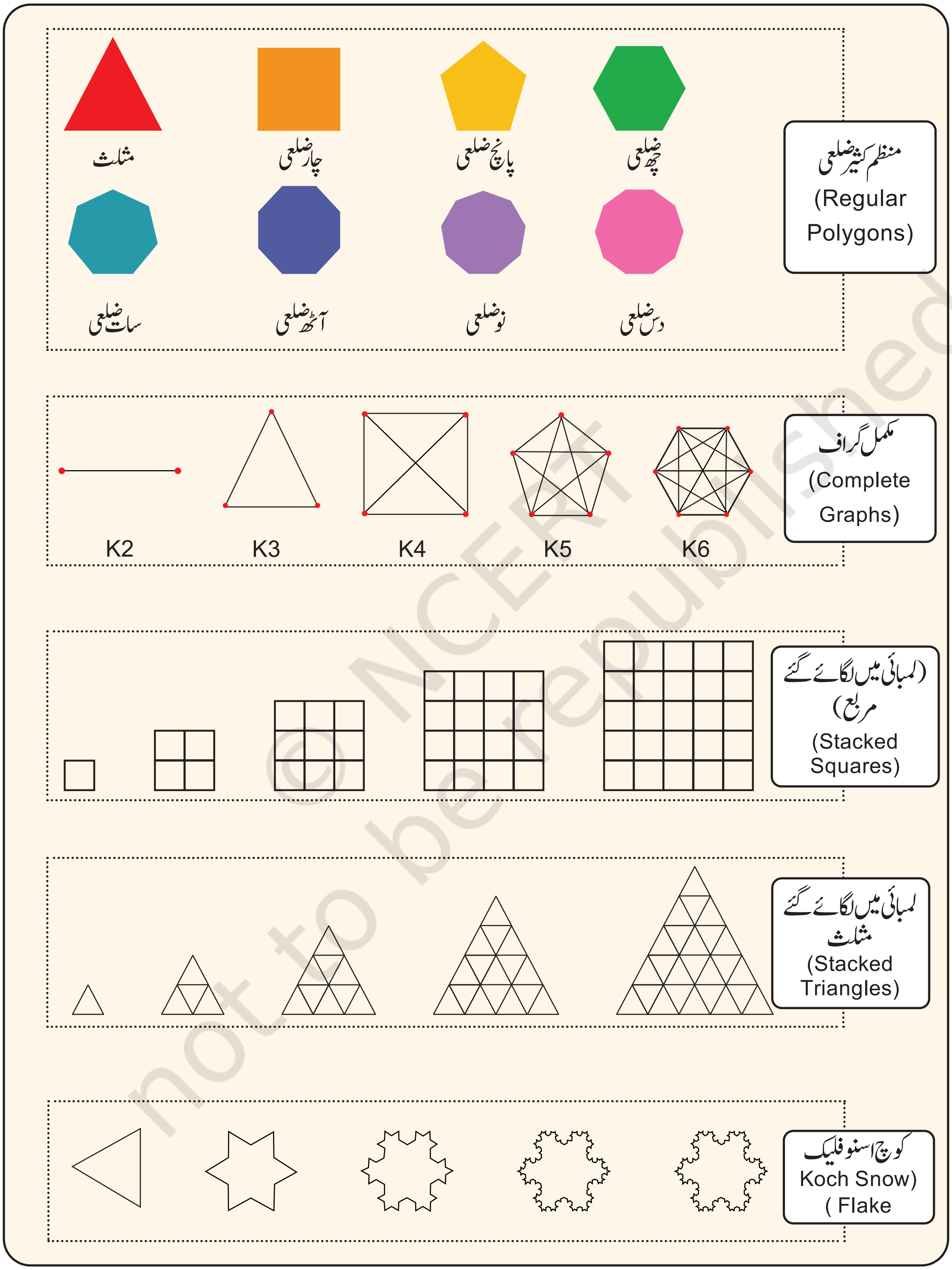
1.5 اشکال میں پیٹرن

بنیادی طور پر ریاضی میں جو دوسری قسم کے پیٹرن پائے جاتے ہیں وہ اشکالی پیٹرن (One dimensions) ہوتے ہیں۔ یہ اشکال یک بُعدی، دو ابعادی اور سہ ابعادی (1D، 2D، 3D) یا کثیر ابعادی ہوتے ہیں یا ان سے زیادہ بھی ہو سکتے ہیں۔ ریاضی کی وہ شاخ جس میں ہم اشکالی پیٹرن کا مطالعہ کرتے ہیں اسے جیومیٹری (Geometry) کہتے ہیں۔

اشکالی تواتر ریاضی کے ذریعے مطالعہ کیے گئے اشکالی پیٹرن کی ایک اہم قسم ہے۔ جدول 3 میں کچھ خاص اشکالی تواتر دکھائے گئے ہیں جن کا مطالعہ ریاضی میں کیا جاتا ہے۔

© NCERT not to be republished

جدول 3 : اشکالی تواتر کی مثالیں



© NCERT not to be republished

معلوم کیجیے

ریاضی بات چیت

1. کیا آپ جدول 3 میں دیے گئے ہر ایک تواتر کے پیٹرن کو پہچان سکتے ہیں؟
2. جدول 3 سے ہر ایک تواتر کو دیکھ کر اپنی کاپی پر دوبارہ بنائیے۔ کیا آپ ہر ایک تواتر کی اگلی شکل بنا سکتے ہیں؟ کیوں یا کیوں نہیں؟ ہر تواتر کے بعد اس میں بن رہی اشکال کے پیٹرن اور اصولوں کی وضاحت اپنی زبان میں کیجیے۔

1.6 تواتری اعداد سے تعلق

اکثر اشکالی تواتر حیرت انگیز طریقے سے عددی تواتر سے جڑے ہوتے ہیں۔ ایسے تعلقات اشکالی تواتر اور اس سے جڑے عددی تواتر کے مطالعے اور فہم دونوں میں مددگار ہو سکتے ہیں۔

مثال: منظم کثیر ضلعی اشکال تواتروں میں ضلعوں کی تعداد کو 3 سے شروع کرتے ہوئے بیان کیا جاتا ہے، یعنی 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9، 10، ... اسی وجہ سے ان اشکال کو **منظم مثلث، چار ضلعی (یعنی مربع) پانچ ضلعی، چھ ضلعی، سات ضلعی، آٹھ ضلعی، نو ضلعی اور دس ضلعی** وغیرہ کہا جاتا ہے۔

'منظم' لفظ یہ واضح کرتا ہے کہ اشکال کے سبھی ضلعوں اور زاویوں کی پیمائش ایک جیسی ہے۔ (یعنی اس کے ضلعے اور کونے بھی ایک جیسے نظر آتے ہیں)۔ اگلے باب میں ہم زاویوں کا گہرائی سے مطالعہ کریں گے۔

جدول 3 میں موجود اشکالی تواتر کا عددی تواتر سے خوب صورت رشتہ ہے۔

معلوم کیجیے

کوشش کیجیے

1. منظم کثیر ضلعی کے تواتر میں ہر شکل کے ضلعوں کی تعداد کی گنتی کیجیے۔ آپ کون سا عددی تواتر حاصل کرتے ہیں؟ منظم کثیر ضلعی تواتر کی ہر شکل میں کونوں کی تعداد کے بارے میں آپ کا کیا خیال ہے؟ کیا آپ کو یکساں عددی تواتر حاصل ہوتا ہے؟ کیا آپ وضاحت کر سکتے ہیں کہ ایسا کیوں واقع ہوتا ہے؟
2. مکمل گراف کے تواتر میں موجود ہر شکل کے خطوط کی تعداد شمار کیجیے۔ آپ کو کون سا عددی تواتر حاصل ہوتا ہے؟ کیا آپ وضاحت کر سکتے ہیں کہ ایسا کیوں ہوتا ہے؟

© NCERT not to be republished

3. لمبائی سے لگائے گئے مربعوں کی ہر شکل میں چھوٹے چھوٹے مربعوں کی کل تعداد کیا ہے؟ ان سے کون ساعددی تواتر حاصل ہوتا ہے؟ کیا آپ اس کی وضاحت کر سکتے ہیں کہ ایسا کیوں ہوتا ہے؟

کوشش کیجیے

4. لمبائی سے لگائے گئے مثلثوں کی ہر شکل میں چھوٹے چھوٹے مثلثوں کی کُل تعداد کیا ہے؟ اس سے کون ساعددی تواتر حاصل ہوگا؟ کیا آپ اس کی وضاحت کر سکتے ہیں؟ (اشارہ: مثلث کی ہر شکل میں، ہر قطار میں کتنے مثلث ہیں؟)

5. کوچ اسنو فلیک تواتر میں ایک شکل سے دوسری شکل میں جانے کے لیے، ہر قطعہ خط '———' کو 'اسپیڈ بمپ' '__/__' سے بدلنا ہوتا ہے۔ جیسے ہی کوئی ایسا کرتا رہتا ہے، یہ بدلاؤ چھوٹے سے چھوٹے قطعہ خطوط کے ساتھ چھوٹے سے چھوٹا ہوتا جاتا ہے۔ کوچ اسنو فلیک کے تواتر میں قطعہ خطوط کی کیا تعداد ہے؟ اس کا متعلقہ عددی تواتر کیا ہے؟ (اس کا جواب ہے 3، 12، 48...... اس کا مطلب 4 کے پاور کا 3 گنا؛ یہ تواتر جدول 1 میں موجود نہیں ہے۔)

خلاصہ

- ریاضی پیٹرن کی تلاش اور ان پیٹرنوں کے وجود کی وضاحت پر مشتمل ہے۔
- ریاضی میں پائے جانے والے سب سے بنیادی پیٹرنوں میں سے ایک عددی پیٹرن ہے۔
- عددی تواتروں کی کچھ اہم مثالوں میں گنتی کے اعداد، طاق اعداد، جفت اعداد، مربع اعداد، مثلثی اعداد، مکعب اعداد، ورہانکہ اعداد اور 2 کے پاور والے اعداد شامل ہیں۔
- کبھی کبھی عددی تواتر خوب صورت اور نمایاں طریقے سے ایک دوسرے سے جڑے ہو سکتے ہیں مثلاً 1 سے شروع ہونے والے طاق اعداد کے تواتر کو جمع کرنے سے مربع اعداد تشکیل پاتے ہیں۔
- تصاویر کے ذریعے عددی تواتر کا تصور تواتر اور ان کے درمیان کے تعلق کی بہتر تفہیم حاصل ہو سکتی ہے۔
- ریاضی میں **اشکالی تواتر** پیٹرن کی دوسری بنیادی قسم ہے۔ اشکالی تواتر کی اہم مثالوں میں منظم کثیر ضلعی، مکمل گراف، مثلثوں اور مربعوں کو لمبائی سے ایک کے اوپر ایک لگانا اور کوچ اسنو فلیک کے تواتر شامل ہیں۔ اشکالی تواتر، عددی تواتر کے ساتھ بہت دل چسپ روابط کا بھی مظاہرہ کرتے ہیں۔

© NCERT not to be republished