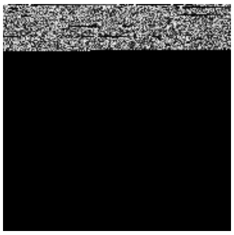
१

गणिते पद्धतयः



१.१ गणितं नाम किम्?

गणितशास्त्रं, बृहत्तरभागे, प्रतिरूपाणां अन्वेषणम् अस्ति। अपि च कथम् एतानि प्रतिरूपाणि सन्तीत्यस्य व्याख्यायै वर्तते।

एतानि प्रतिरूपाणि अस्माकं परितः सर्वत्रैव वर्तन्ते - अस्माकं परिसरे, गृहे, विद्यालये, किञ्च सूर्य-तारक-चन्द्रमसादीनाम् अपि आवर्तने। यद् यद् अस्मत्परितः वयं पश्यामः, कुर्मश्च - क्रयणं वा, पाको वा, कन्दुकप्रेषणं वा, क्रीडनं वा, किञ्च जलवायोः पद्धतेः अवगमनं, तन्त्रीयोपयोगश्चापि।

विन्यासानां तद्व्याख्यानां च अन्वेषणम् आनन्ददायकं सृजनात्मकं च भवितुम् अर्हति। इदमेवात्र कारणं यद्धि गणितशास्त्रज्ञाः गणितं कलारूपेण विज्ञानरूपेण च मन्यन्ते इति। अस्मिन् वर्षे, वयं आशां कुर्मो यत् भवन्तः गणितीयविन्यासानां अन्वेषणे, बोधने च संलग्नाः सृजनात्मकतां कलाविष्कारं च द्रष्टुं अवसरं प्राप्स्यन्ति इति।

न केवलं विद्यमानानि प्रतिरूपाणि अन्वेष्टुम्, अपि तु ते किमर्थं विद्यमानानि इति विवरणानि अपि अन्वेष्टुं गणितस्य लक्ष्यानि मनसि स्थापयितुं महत्त्वपूर्णम् अस्ति। लघु-व्याख्याः प्रायः सन्दर्भेभ्यः परं प्रयुज्यन्ते, यासु ते आविष्कृताः आसन्, ततः प्रणोदयितुं साहाय्यं कर्तुं शक्नुवन्ति।

© NCERT not to be republished

उदाहरणार्थं, नक्षत्राणां, ग्रहाणां, तेषां उपग्रहानां च गतौ प्रतिरूपाणां बोधः मानवसमाजं गुरुत्वाकर्षणं सिद्धान्तं विकसयितुं प्रेरयति, अस्मान् स्वकीयान् उपग्रहान् प्रक्षेपयितुं, चन्द्रं प्रति, मङ्गलग्रहं प्रति च राकेट्-इत्येतान् प्रेषयितुं अनुमन्यते; तथैव, जीनोम्-मध्ये प्रतिरूपाणां बोधः रोगाणां निदानं, चिकित्सां च कर्तुं साहाय्यम् अकरोत्-एतादृशानां सहस्राणां उदाहरणानां मध्ये।

एतत् निश्चिन्वन्तु

१. किं भवन्तः अन्यानि उदाहरणानि चिन्तयितुं शक्नुवन्ति यत्र दैनन्दिनजीवने गणितं अस्माकं साहाय्यं करोति?

२. गणितेन मानवतायै अग्रे गन्तुं कथं साहाय्यं कृतम्? (भवान् उदाहरणानि चिन्तयितुं शक्नोतिः वैज्ञानिकपरीक्षाः, अस्माकं अर्थव्यवस्थायाः लोकतन्त्रस्य च सञ्चालनं, भवन-सेतुः, गृहाणि अथवा अन्यानि जटिलानि संरचनानि, टी. वी., मोबैल्-दूरवाण्याः, सङ्गणकानां, द्विचक्रिकानां, रेलयानानां, कार्-यानानां, विमानानां, पञ्चाङ्गानां, घटकानाम् इत्यादीनां निर्माणम्।)

गणित-कथा

१.२ सङ्ख्यासु प्रतिरूपाणि

गणितशास्त्रे घटितानि सर्वाधिकानि मूलभूतानि प्रतिरूपाणि संख्यानां प्रतिरूपाणि सन्ति, विशेषतः सम्पूर्णसङ्ख्यानां प्रतिरूपाणि सन्ति।

०, १, २, ३, ४, ...

गणितशास्त्रस्य शाखा यया सम्पूर्णासु सङ्ख्यासु अध्ययनस्य विन्यासाः ज्ञातुं शक्यन्ते सा हि **संख्या सिद्धान्त** इति कथ्यते।

सङ्ख्या-क्रमः गणितशास्त्रविदः अध्ययनं कुर्वन्तः विन्यासप्रकाराः अत्यन्तं मूलभूतानि, अत्यन्तं रोचकानि च सन्ति।

सारणी - १ मध्ये गणितेषु अधीताः केचन प्रमुखाः सङ्ख्याक्रमाः दर्शिताः।

© NCERT not to be republished

सारणी १ : सङ्ख्या-क्रमस्य उदाहरणानि

१, १, १, १, १, १, १, ...	(सर्वे एकाङ्काः)
१, २, ३, ४, ५, ६, ७, ...	(संख्यानां गणना)
१, ३, ५, ७, ९, ११, १३, ...	(विषमाः संख्याः)
२, ४, ६, ८, १०, १२, १४, ...	(समाः संख्याः)
१, ३, ६, १०, १५, २१, २८, ...	(त्रिकोणीयाः संख्याः)
१, ४, ९, १६, २५, ३६, ४९, ...	(वर्गसंख्याः)
१, ८, २७, ६४, १२५, २१६, ...	(क्यूब् संख्याः)
१, २, ३, ५, ८, १३, २१, ...	(विराहाङ्काः संख्याः)
१, २, ४, ८, १६, ३२, ६४, ...	(२ गुणिताः संख्याः)
१, ३, ९, २७, ८१, २४३, ७२९, ...	(३ गुणिताः संख्याः)

एतत् निश्चिन्वन्तु

गणित-कथा

१. भवन्तः अनुक्रमणिकेषु प्रत्येकस्मिन् विन्यासं ज्ञातुं शक्नुवन्ति। सारणी १?

२. भवतः नोट्बुक्-मध्ये सारणी - १ इत्यस्य प्रत्येकं क्रमं, प्रत्येकस्मिन् क्रमानुसारेण अग्रिमत्रयं अङ्कैः सह पुनः लिखतु! प्रत्येकस्य अनुक्रमस्य अनन्तरं, क्रमस्य सङ्ख्यानां निर्माणार्थं किं नियमः अस्ति इति स्वकीयेषु शब्देषु लिखतु।

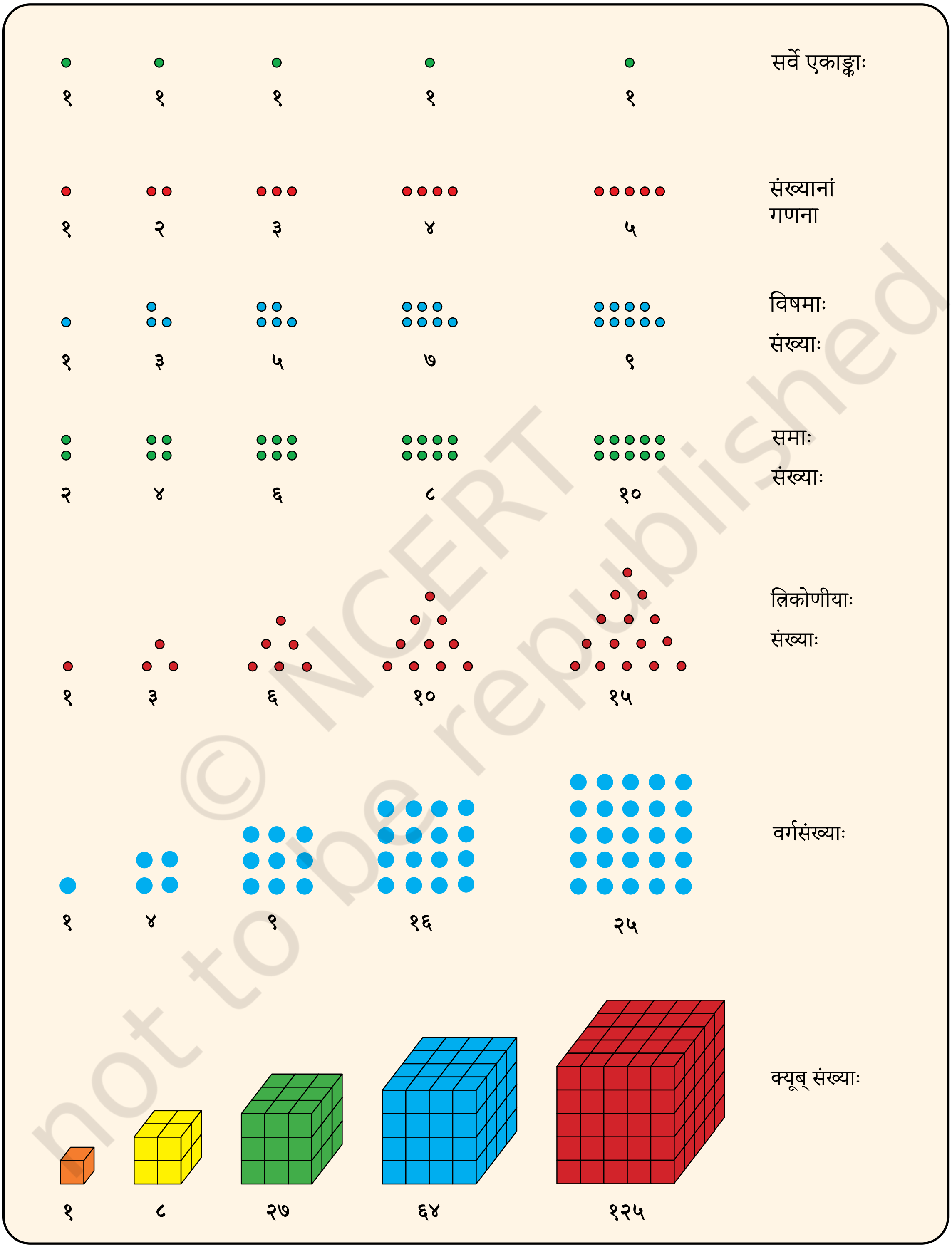
१.३ संख्यानां क्रमाङ्कानां पर्यवेक्षणम्

अनेकसङ्ख्याकाः अनुक्रमाः चित्राणां उपयोगेन दृश्यन्ते। चित्राणां वा रेखाचित्राणां वा माध्यमेन गणितीय-वस्तूनां दृश्यीकरणं गणितीय-प्रतिरूपाणां परिकल्पनानां च बोधने अतीव फलप्रदः उपायः भवितुम् अर्हति।

एहि, अधः दत्तानां चित्राणाम् उपयोगेन सारणी - १ मध्ये आदिमानां सप्तानुक्रमान् प्रदर्शयामः।

© NCERT not to be republished

सारणी २ : केषाञ्चन सङ्ख्यानुक्रमाणां चित्रैः प्रदर्शनम्



© NCERT not to be republished

एतत् निश्चिन्वन्तु

गणित-कथा

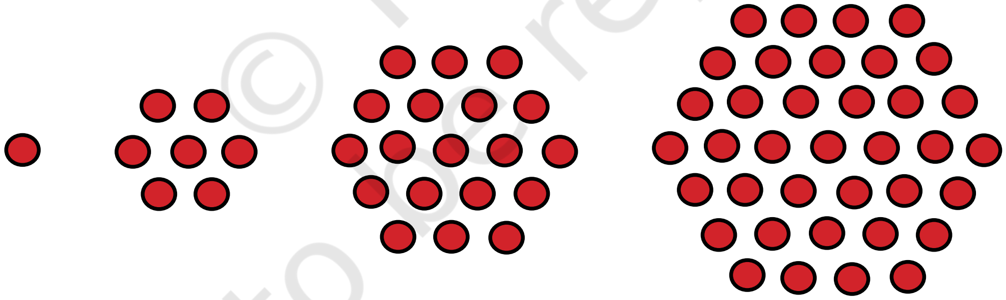
१. भवतः नोट्बुक् मध्ये सारणी २ मध्ये सङ्ख्या-अनुक्रमाणां चित्रात्मक-प्रतिनिधित्वानि प्रतिलिपयन्तु, प्रत्येकस्य अनुक्रमस्य अग्रिमं चित्रं च चित्रयन्तु!

२. किमर्थं १, ३, ६, १०, १५,. इत्येताः संख्याः **त्रिकोणीयाः संख्याः** इत्युच्यन्ते? किमर्थं १, ४, ९, १६, २५ इति च संख्याः **वर्गसंख्याः** अथवा **वर्गाः** इति कथ्यन्ते? कुतश्च १, ८, २७, ६४, १२५, इत्येताः संख्याः **क्यूब् संख्याः** इति चोच्यन्ते?

३. भवान् सूचयिष्यति यत् ३६ त्रिभुजसङ्ख्या, वर्गसङ्ख्या च अस्ति इति! अर्थात्, त्रिभुजे तथा वर्गे च ३६ बिन्दुः पूर्णतया व्यवस्थिताः भवितुम् अर्हन्ति। भवतः नोट्बुक्-मध्ये एतत् चित्रणं चित्रयन्तु!

एतत् दर्शयति यत् समानसङ्ख्या भिन्नाभिन्नरूपेण प्रतिनिधित्वं कर्तुं शक्नोति, तथा च सन्दर्भे अवलम्ब्य भिन्नाः पात्राणि निर्वोढुं शक्नोति। भिन्नविधैः अन्यसङ्ख्याणां चित्रात्मकरूपेण प्रतिनिधित्वं कुर्वन्तु!

४. संख्यानां अनुवर्तनं किं भवन्तः वदन्ति?



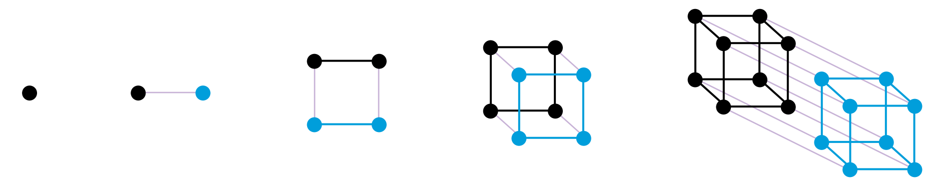
१ ७ १९ ३७

सम्यगुक्तं भवता। एताः संख्याः **हेक्सागोनल् सङ्ख्याः** इत्युच्यन्ते! एताः संख्याः स्वस्य लेखपुस्तिकायाम् अङ्कयन्तु। अस्मिन् अनुवर्तने अग्रिमा संख्या का भविष्यति?

५. किं भवन्तुः २ गुणितानां संख्यानाम् एकाम् अनुवर्तिकां चित्रात्मकतया दर्शयितुं शक्नुवन्ति? समानतया ३ गुणितानाम् अपि?

© NCERT not to be republished

२ गुणितानां संख्यानाम् अनुक्रमणस्य एका सम्भावितः पन्था अत्र प्रदर्शितः।



१ २ ४ ८ १६

१.४ सङ्ख्यानाम् अनुक्रमाणां मध्ये सम्बन्धः

समकाले, संख्या-क्रमः आश्चर्यजनकरूपेण प्रत्येकं अन्येन सह सम्बद्धाः भवितुम् अर्हन्ति।

उदाहरणम् - यदा वयं विषमसङ्ख्याः योजयितुं प्रारभामः तदा किं भवति?

१ = १

१ + ३ = ४

१ + ३ + ५ = ९

१ + ३ + ५ + ७ = १६

१ + ३ + ५ + ७ + ९ = २५

१ + ३ + ५ + ७ + ९ + ११ = ३६

⋮

अयं वस्तुतः सुन्दरः प्रतिरूपः अस्ति!

किमर्थं एतत् भवति? किं भवन्तः चिन्तयन्ति यत् तत् सर्वदा भविष्यति इति?

उत्तरम् अस्ति यत् स्वरूपं सर्वदा भवति इति। परन्तु किमर्थं? यथा पूर्वमेव उल्लिखितम्, किमर्थं विन्यासः भवति इत्यस्य कारणं केवलं महत्त्वपूर्णं, उत्साहजनकं च अस्ति यथा विन्यासः एव।

एकं चित्रं तस्य व्याख्यां कर्तुं शक्नोति।

चित्रसहितं दृश्यीकरणं घटनायाः व्याख्यायां साहाय्यं कर्तुं शक्नोति। स्क्वेर्-ग्रिड्-मध्ये डाट्-सङ्ख्याः गणयित्वा निर्मितानि स्क्वेर्-सङ्ख्याः पुनः स्मर्यन्तु।

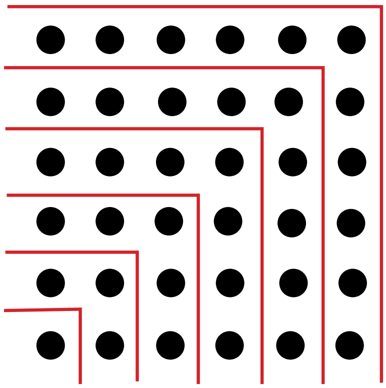
१, ३, ५, ७ इत्येतासां विषमसंख्यानां वर्ग-ग्रिड्-मध्ये बिन्दूनां विभाजनं वयं कथं कर्तुं शक्नुमः?

गणित कथा

अग्रे पठनात् पूर्वं क्षणाय एतस्य विषये चिन्तयतु!

© NCERT not to be republished

इदं कथं कर्तुं शक्यते इत्यत्र दर्शितम्।



एतत् चित्रं अधुना तत् प्रत्यक्षं करोति।

१ + ३ + ५ + ७ + ९ + ११ = ३६

यतो हि एतादृशं चित्रं कस्यापि आकारस्य वर्गस्य कृते निर्मातुं शक्यते, अतः एतत् वर्णयति यत् किमर्थं विषमसङ्ख्याः योजयित्वा वर्गसङ्ख्याः दीयन्ते इति।

- एतादृशस्य चित्रस्य चित्रणेन, प्रथमानां दशानां विषमानांव संख्यानां योगः कः इति भवन्तः/भवत्यः कथं वक्तुं शक्नोति?
- अधुना एतादृशस्य चित्रस्य कल्पनेन, अथवा आवश्यकतानुगुणं आंशिकरूपेण चित्रणेन, प्रथमानां शतानां विषमानां संख्यानां योगः कः इति कथं वक्तुं शक्यते?

अनुक्रमानां मध्ये एतादृशस्य सम्बन्धस्य अन्यत् उदाहरणम् -
उपरि-अधः योजयतः।

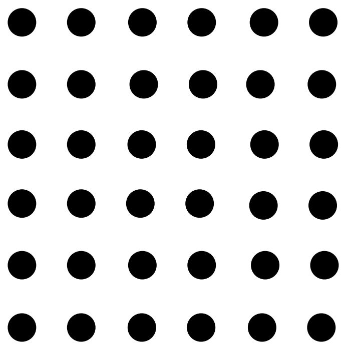
भवन्तः अधः दत्तं स्वरूपं पश्यन्तु।

१ = १
१ + २ + १ = ४
१ + २ + ३ + २ + १ = ९
१ + २ + ३ + ४ + ३ + २ + १ = १६
१ + २ + ३ + ४ + ५ + ४ + ३ + २ + १ = २५
१ + २ + ३ + ४ + ५ + ६ + ५ + ४ + ३ + २ + १ = ३६

एतत् अद्यापि वर्गसङ्ख्याः प्राप्तुं अन्यः उपायः इति प्रतीयते-गणनासङ्ख्याः उपरि अधः च योजयित्वा!

© NCERT not to be republished

किं भवान् एतादृशं चित्रात्मकं विवरणं अन्वेष्टुं शक्नोति?



एतत् निश्चिन्वन्तु

प्रयतताम् इदम्

१. किं भवन्तः समानं चित्रात्मकं विवरणं अन्वेष्टुं शक्नुवन्ति यत् किमर्थं गणनासङ्ख्याः वर्धन्ते अधः च योजयन्ति, यथा, १, १ + २ + १, १ + २ + ३ + २ + १,...., एवंप्रकारेण वर्गसङ्ख्याः प्राप्यन्ते?

२. भवतः छायाचित्रस्य विशालं संस्करणं कल्पयित्वा, अथवा तस्य चित्रणेन। आंशिकरूपेण, यथा आवश्यकं, भवान् यत् मूल्यं भविष्यति तत् द्रष्टुं शक्नोति। १ + २ + ३ + ··· + ९९ + १०० + ९९ + ··· + ३ + २ + १?

३. यदा भवान् सर्वान् एकाङ्कान् योजयितुम् आरभते तदा कं क्रमं प्राप्नोति? यदा भवान् सर्वान् एकाङ्कान् उपरि अधश्च योजयति तदा कं क्रमं प्राप्नोति?

४. यदा भवान् गणनां सङ्ख्याः योजयितुं आरभते तदा किं क्रमं प्राप्नुयात्? किं भवन्तः लघुतरं चित्रात्मकं विवरणं दातुं शक्नुवन्ति?

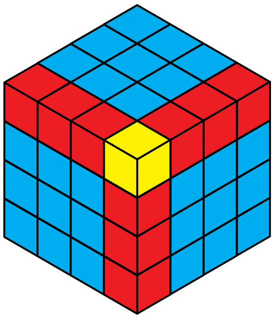
५. यदा भवन्तः क्रमानुगत-त्रिकोणीय-सङ्ख्यानां युग्मान् योजयन्ति तदा किं भवति? तत्, स्वीकरोतु १ + ३, ३ + ६, ६ + १०, १० + १५, ... किं क्रमं भवान् प्राप्स्यति? किमर्थं? चित्रसहितं तस्य व्याख्यां कर्तुं शक्नोति वा?

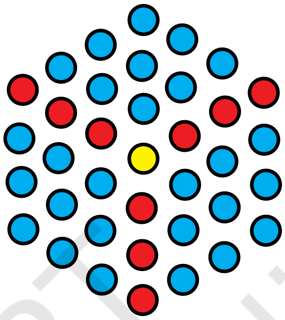
६. यदा भवान् १ तः आरभ्य २ गुणिताः संख्याः योजयितुं आरभते, अर्थात्, १, १ + २, १ + २ + ४, १ + २ + ४ + ८ इति, तदा किं भवति? अधुना एतासु सङ्ख्यासु प्रत्येकं १ योजयति चेत् का संख्याः प्राप्यन्ते? किमर्थं च तद्?

© NCERT not to be republished

७. यदा भवान् त्रिकोणीयसङ्ख्याः ६ इत्यनेन गुणयित्वा १ योजयति तदा किं भवति? किं क्रमं भवान् प्राप्स्यति? चित्रसहितं तस्य व्याख्यां कर्तुं शक्यसे वा?

८. यदा भवान् हेक्सागोनल्-सङ्ख्याः योजयितुं आरभते, अर्थात्, १, १ + ७, १ + ७ + १९, १ + ७ + १९ + ३७, ... इति, तदा किं भवति? कं क्रमं च तदा भवान् प्राप्स्यति? घनस्य चित्रम् उपयुज्य भवान् तत् व्याख्यातुं शक्नोति वा?





९. पट्टिकायां १ मध्ये स्वकीयाः प्रतिरूपाणि वा सम्बन्धान् वा अन्विष्यतु। चित्रसहितं वा अन्यथा वा किमर्थं भवति इति भवान् व्याख्यातुं शक्नोति वा?

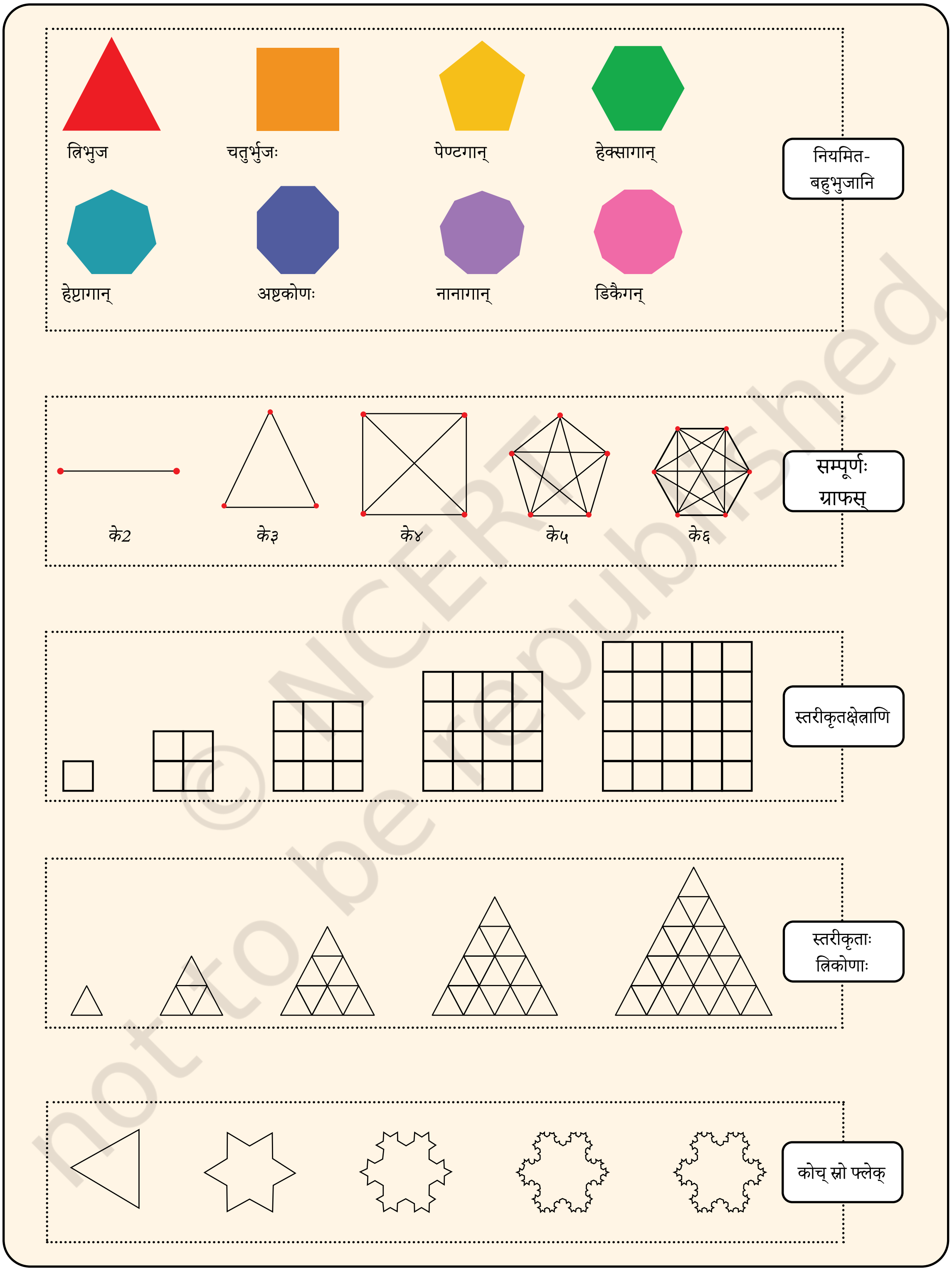
१.५ आकृतिषु प्रतिरूपाणि

गणितशास्त्रे घटितानि अन्यानि महत्त्वपूर्णानि मूलभूतानि च प्रतिरूपाणि आकृत्याः प्रतिरूपाणि सन्ति। एते आकृतयः एक-द्वि-त्रि-आयामेषु (१डि, २डि, अथवा ३डि) भवितुम् अर्हन्ति-अथवा इतोऽपि अधिक-आयामेषु. गणितस्य शाखायां, यासु आकृतौ अध्ययन-प्रतिरूपाणि ज्यामितिः इति कथ्यते।

आकार-क्रमाः - एते महत्त्वपूर्णेषु प्रकारेषु अन्यतमः आकारविन्यासः अस्ति यस्य अध्ययनं गणितशास्त्रज्ञाः कुर्वन्ति। सारणी-३ गणितेषु अध्ययनं कृतानि कतिपयानि की-आकार-अनुक्रमानि दर्शयति।

© NCERT not to be republished

सारणी ३ : आकारानुक्रमानाम् उदाहरणानि



© NCERT not to be republished

एतत् निश्चिन्वन्तु

१. पट्टिकायां ३ मध्ये प्रत्येकस्मिन् अनुक्रमणिके प्रतिरूपं भवान् अवगन्तुं शक्नोति वा?

२. भवतः नोट्बुक्-मध्ये सारणी - ३ मध्ये प्रत्येकं क्रमं प्रयतताम् पुनः चालयतु। प्रत्येकस्मिन् अनुक्रमे भवन्तः अग्रिमं रूपं चित्रयितुं शक्नुवन्ति वा? किमर्थं वा किमर्थं न वा? प्रत्येकस्य अनुक्रमस्य अनन्तरं, स्वभाषायां वर्णयतु यत् किं भवति इति। क्रमानुसारेषु आकृतयः निर्मातुं नियमः वा विन्यासः वा।

गणित वार्तालापः।

१.६ संख्यानुक्रमानां सम्बन्धः

प्रायशः, आकार-क्रमः आश्चर्यजनकेषु मार्गेषु सङ्ख्यासरेखेषु सम्बद्धः भवति। लघु-सम्बन्धाः अध्ययनार्थं सहायकानि भवितुम् अर्हन्ति तथा च आकार-क्रमं तथा तत्सम्बद्ध-सङ्ख्या-क्रमं च अवगन्तुं शक्नुवन्ति।

उदाहरणम् - नियमित-बहुभुजानां आकारक्रमेषु पार्श्वानां संख्याः, यथा, ३, ४, ५, ६, ७, ८, ९, १० ... इति अङ्कैः आरभ्य गणनाभिः दीयते। अतः किमर्थम् एते आकृतयः, विशेषाः, इति उच्यन्ते। **नियताः त्रिभुजाः, चतुर्भुजाः** (यथा, **वर्ग**), **पेण्टगान्, हेक्सागान्, हेप्टागान्, अष्टकोणः, नानागान्, डिकैगन्,** चेत्यादीनि।

'नियमितः' इति शब्दः एतान् आकारान् धारयति इति तथ्यम् निर्दिशति। समानतया दीर्घाः पक्षाः अपि समानाः ' कोणाः' (यथा, पक्षाः समानानि दृश्यन्ते, मूलानि अपि समानानि दृश्यन्ते)। आगामि-अध्याये अधिकतया गहनतायां कोणानां विषये वयं चर्चयामः।

सारणी - ३ मध्ये अन्यानि आकार-अनुक्रमानि अपि संख्या-अनुक्रमैः सह सुन्दर-सम्बन्धान् धारयन्ति।

एतत् निश्चिन्वन्तु

१. नियमित-बहुभुजानां क्रमस्य प्रत्येकस्य आकारस्य पार्श्वानां सङ्ख्या गणयतु। किं सङ्ख्या-क्रमं भवान् प्राप्स्यति? नियमित-बहुभुजानां क्रमस्य प्रत्येकस्य आकारस्य मूलानां सङ्ख्यायाः विषये किम्? किं भवन्तः समानसङ्ख्याक्रमं प्राप्नुयुः? किमर्थं एतत् भवति इति भवान् व्याख्यातुं शक्नोति वा?

२. सम्पूर्ण-आलेखानां अनुक्रमणिकायां प्रत्येकस्य आकारस्य पङ्क्त्याः सङ्ख्या गणयतु। किं सङ्ख्या-क्रमं भवान् प्राप्स्यति? किमर्थं व्याख्यातुं शक्यसे वा?

प्रयतताम् इदम्

© NCERT not to be republished

३. स्तरीकृत-वर्गाणां प्रत्येकस्य आकारस्य कति लघुवृक्षाः सन्ति? कः सङ्ख्याक्रमः एतत् ददति? किमर्थं व्याख्यातुं शक्यते?

४. स्तरीकृतानां त्रिभुजानां प्रत्येकस्य आकारस्य कति लघुतराः त्रिभुजानि सन्ति? कः सङ्ख्याक्रमः एतत् ददति? किं त्वं व्याख्यातुं शक्नोषि वा? (सूत्रम् - अनुक्रमणिकायां प्रत्येकम् आकृतौ, प्रत्येकस्मिन् पङ्क्तौ कति त्रिभुजानि सन्ति?)

प्रयतताम् इदम्

५. कोच्-स्नोफ्लेक्-सीक्वेन्स् मध्ये अग्रिम-आकारं प्रति एकं आकारं प्राप्तुं, प्रत्येकं लैन्-सेगमेण्ट् इत्यस्य स्थाने एकं स्थापयतु '-' बै ए ' स्पीड्-बम्प्' इति। ... यथा कश्चित् एतत् अधिकं अधिकं करोति, परिवर्तनानि अतीव लघुतरैः रेखा-खण्डैः सह लघुतराः लघुतराः च भवन्ति। कोच्-स्नोफ्लेक् इत्यस्य प्रत्येकस्य आकारस्य कति कुल-रेखा-खण्डाः सन्ति? तत् किम् अस्ति? तत्संबंधितसङ्ख्याक्रमः? (उत्तरम् अस्ति ३, १२, ४८, ..., या हि ३ गुणिता संख्या; अयं क्रमः सारणी - १ मध्ये न दृश्यते।)

सारांशः

- गणितं प्रतिरूपाणां अन्वेषणरूपेण, एते प्रतिरूपाणि किमर्थं विद्यमानानि इति व्याख्यायै च द्रष्टुं शक्यते।
- गणितशास्त्रे घटितानि अत्यन्तं मूलभूतानि प्रतिरूपाणि **सङ्ख्या-क्रमः** इत्युच्यन्ते।
- संख्याशृङ्खलायाः कानिचन महत्त्वपूर्णानि उदाहरणानि सन्ति-गणनासङ्ख्याः, विषमसङ्ख्याः, समसङ्ख्याः, वर्गसङ्ख्याः, त्रिकोणीयसङ्ख्याः, घनसङ्ख्याः, वीरहङ्कसङ्ख्याः, २ गुणिताः संख्याश्च।
- समानसङ्ख्याक्रमाः सुन्दर-उल्लेखनीय-मार्गेषु परस्परं सम्बद्धाः भवितुम् अर्हन्ति। उदाहरणार्थं, १ दत्त-वर्ग-अङ्कैः आरभ्य, विषम-अङ्कानां क्रमं योजयतु।
- संख्याव्यवरणानां उपयोगेन चित्राणि अनुक्रमान्, तेषां मध्ये सम्बन्धान् च अवगन्तुं साहाय्यं कर्तुं शक्नुवन्ति।
- **आकार-क्रमः** - गणितेषु प्रतिरूपाणां अन्यः मूलभूतप्रकारः अस्ति। केषुचित् महत्त्वपूर्णेषु आकारक्रमेषु नियमित-बहुभुजानि, पूर्ण-रेखाचित्राणि, स्तरीकृत-त्रिभुजानि, वर्गाणि च, कोच्-स्नोफ्लेक्-पुनरावर्तनं च अन्तर्भवन्ति। आकार-अनुक्रमाः संख्या-अनुक्रमैः सह अनेकान् रोचकान् सम्बन्धान् अपि प्रदर्शयन्ति।

© NCERT not to be republished