

अणपूर



0674CH07

यादि करियो, जडहिं कुझ पूरे अददनि (whole numbers) वारियूं शयूं बराबर साझा कयूं वेदियूं आहिनि, तडहिं अणपूर जाहिर कंदो आहे त हर हिक शइ जो केतिरो भाडो आहे।

शबनम : छा तव्हांखे यादि आहे, जे हिक फुल्को बिनि बारनि मंझि बराबर अंदाज में विरिहाइजे, त हर-हिक बार खे फुल्के जो केतिरो भाडो मिलंदो।

मुक्ता : हर-हिक बार खे अधु फुल्को मिलंदो।

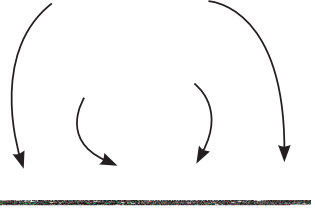
शबनम: हिक जे अधु भाडे 'अणपूर' खे $1/2$ लिखिबो आहे। असां कडहिं-कडहिं हिन खे 'हिक भाडो ब' बि पढंदा आहियूं।

मुक्ता: जे हिक फुल्के खे चइनि बारनि में बराबर- बराबर विरिहाइजे, त हर-हिक बार खे फुल्के जो केतिरो भाडो मिलंदो?

शबनम: हर-हिक बार खे $1/4$ फुल्को मिलंदो।

मुक्ता: ऐं कहिडो भाडो वडो आहे? $1/2$ फुल्को या $1/4$ फुल्को?

शबनम: जडहिं 2 बार 1 फुल्के खे बराबर विरिहाइनि था, त हर हिक बार खे $1/2$ फुल्को मिले थो। साग्रिये नमूने, जडहिं 4 बार हिक फुल्के खे विरिहाइनि था, त हरहिक बार खे $1/4$ फुल्को मिले थो. छाकाणि त बियें टोले (group) में हिक ई फुल्के खे वधीक बार बराबर भाडनि में



विरिहाइनि था, इनकरे हरहिक बार खे घटि भाडो मिलंदो । इनकरे $1/2$ फुल्को $1/4$ खां वधीक आहे ।

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$$

7.1 अणपूर एका ऐं बराबर भाडा

- बेनी: कहिडो अणपूर वडो आहे? $1/5$ या $1/9$?
- अरविन: अददु 9, 5 खां वडो आहे । इनकरे मूखे लगे थो त $1/9$ अंगु $1/5$ खां वडो आहे । छा मां सही आहियां?
- बेनी: न! इहा हिक आम चुक (common mistake) आहे । इन्हनि अणपूर अंगनि जो भाडनि वांगुरु वीचारु करियो ।
- अरविन: जे हिक फुल्के खे 5 बारनि में विरिहायो वजे, त हरहिक बार खे फुल्के जो $1/5$ भाडो मिलंदो । जेकडहिं फुल्के खे 9 बारनि में विरिहायो वजे थो, त हर हिक बार खे फुल्के जो $1/9$ भाडो मिलंदो ।
- बेनी: बिल्कुल सही! हाणे वरी वीचारु करियो, कहिडो भाडो वडो आहे?
- अरविन: अगरि मां कंहिं शइ खे वधीक माणहुनि में विरिहायां थो, त मूखे घटि भाडो मिलंदो । इनकरे $1/9 < 1/5$
- बेनी: हाणे तव्हां सही समुझियो अथव !

ओह, त $1/100$, $1/200$ खां वधीक आहे

जडहिं हिक एके खे घणनि ई बराबर भाडनि मे विरिहायो वेंदो आहे, त हर-हिक भाडे खे अणपूर एको चयो वेंदो आहे । ही सभु अणपूर एका आहिनि:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{10}, \dots, \frac{1}{50}, \dots, \frac{1}{100}, \text{etc.}$$

असां कडहिं कडहिं अणपूर एकनि खे एको अणपूर बि चवंदा आहियूं ।

अचो अभ्यासु करियूं

खाली हंधनि में अणपूर अंग भरियो.

- ट्रिनि जेतूननि जो वज़नु 1 किलो आहे । जे उहे अटिकल साग्रिये आकार जा हुजनि, त हर-हिक जेतून जो अंदाज़नि वज़नु _____ किलो हूंदो ।
- हिक थोकु वापारीअ 1 किलो चांवरनि खे बराबर वज़न वारे चइनि पुड़नि में पैकु कयई । हर-हिक पुड़े जो वज़नु _____ किलो आहे ।
- चइनि दोस्तनि 3 गिलास कमंद जे रस जो आर्डर डिनो ऐं उनखे पाण में बराबर-बराबर विरिहायनि ।

गणित
गाल्हि

हरहिक दोस्त _____ गिलास कमंद जो रसु पीतो ।



4. हिक वडी मछीअ जो वज़नु $1/2$ किलो आहे । हिक नंढी मछीअ जो वज़नु $1/4$ किलो आहे । बिन्ही जो कुलु वज़नु _____ किलो आहे ।

अगूणी ज्ञाण !

अणपूर लफ़्ज़ु ऐं इनजो इस्तेमालु भारत में क़दीम ज़माने खां हलंदो आयो आहे । ऋग्वेद में अणपूर $3/4$ खे त्रि-पद चयो वियो आहे । इनजो अर्थ उहो ई आहे जेको अजु घणनि ई भारतीय भाषाऊनि में $3/4$ लाइ हलंदइ लफ़्ज़नि में थींदो आयो आहे, जीअं—हिंदीअ जी आम बोलीअ में , 'तीन पाव' ऐं तमिल में 'मुक्काल' । हकीकत में अणपूर लाइ जेके लफ़्ज़ अजु असीं घणनि ई भारतीय भाषाऊनि में इस्तेमाल कंदा आहियूं, से क़दीम ज़माने खां कतबि ईंदा रहिया आहिनि ।

तव्हांजे घरि, शहरि या राज्य में मुख्तलिफ़ु बोलियुनि में अणपूर लाइ इस्तेमालु थींदइ लफ़्ज़नि खे गोल्हे हथि करियो ऐं उन ते गाल्हि-बोल्हि करियो । पंहिंजे डाडे-डाडी, माउ-पीउ, मास्तरनि ऐं हम-क्लासियुनि सां पुछो त उहे जुदा-जुदा अणपूर लाइ कहिड़ा-कहिड़ा लफ़्ज़ इस्तेमाल कंदा आहिनि, जीअं—डेटु, मुनो, सवा, पाउ, पोणा ब, अधु, अढाई, इन्हनि खे हिते लिखो:

5. डिनल अणपूर लफ़्ज़नि खे नंढे खां वडे सिटाव में बीहारे खाली बॉक्सनि में लिखो:
, मुनो, सवा, अधु, पाउ, अढाई ।

पंहिंजो जवाबु हिते लिखो ।

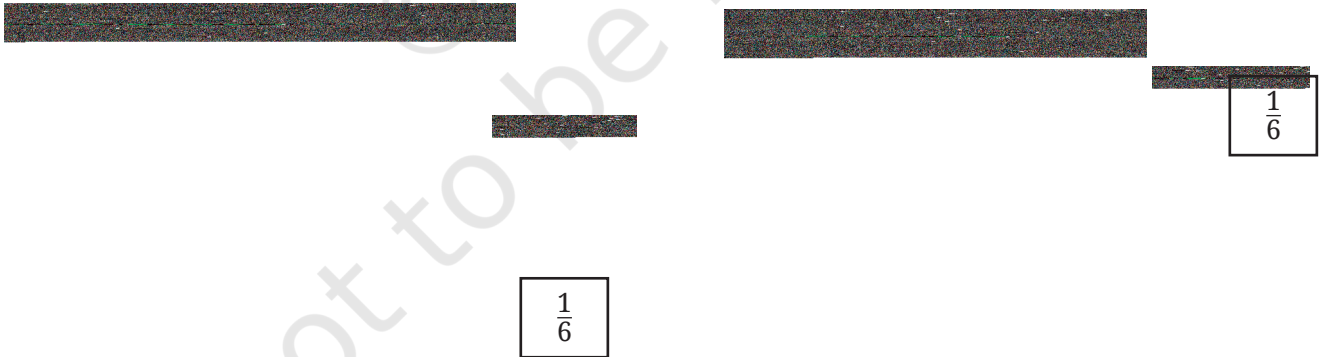
7.2 सालिम जे भाडनि वांगुर अणपूर एका

हेठि 2 भाडनि में टुटल लाई डेखारी वेई आहे। हरहिकु टुकुर सालिमु लाईअ जो केतिरो भाडो आहे?

हिक पूरी लाई



असां डिसी सघूं था त वडे टुकर में $1/4$ लाईअ जा 3 हिसा आहिनि। इनकरे असां वडे टुकर खे अणपूर एके $1/4$ जो इस्तेमाल करे मापे सघूं था। असां डिसूं था त वडो टुकुर $3/4$ लाई आहे।



6 बराबर टुकुरनि में कटियल हिक सालिमु लाई।

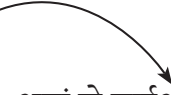
बियें तरीके सां 6 बराबर टुकुरनि में कटियल हिक पूरी लाई।

☀ हिक सालिमु लाईअ खे गूनागूं तरीकनि सां 6 बराबर भाडनि में विरिहाइण ते, असां खे अलग-अलग आकार जा $1/6$ लाईअ जा टुकुर मिलनि था। छा इहे सागिये आकार जा आहिनि?



गणित
गाल्हि

हेठि डिनल लाईअ जो अणपूर एको छा आहे?



असां खे लाईअ खे 3 बराबर
भाडनि में विरिहाइण ते हीउ
टुकुरु मिले थो। इनकरे हीउ
 $1/3$ लाई-टुकुरु आहे।

हिक सालिमु लाई

$$\frac{1}{3}$$

☀ अचो अभ्यासु करियूं

हेठि डिनल तस्वीरूं हिक पूरी लाईअ जूं जुदा-जुदा अणपूर एका डेखारीनि थियूं। हरहिकु टुकुरु सालिमु
लाईअ जो घणो भाडो आहे?



क.



ख.



ग.



घ.



ङ.

च.

छ.

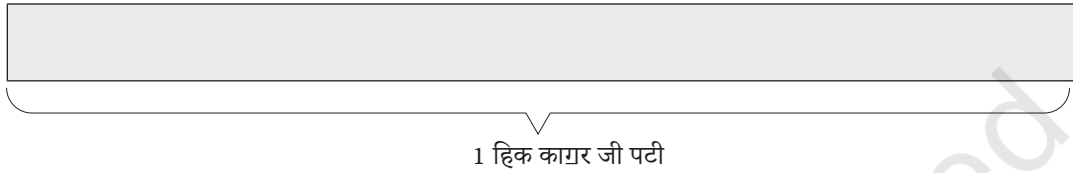
ज.



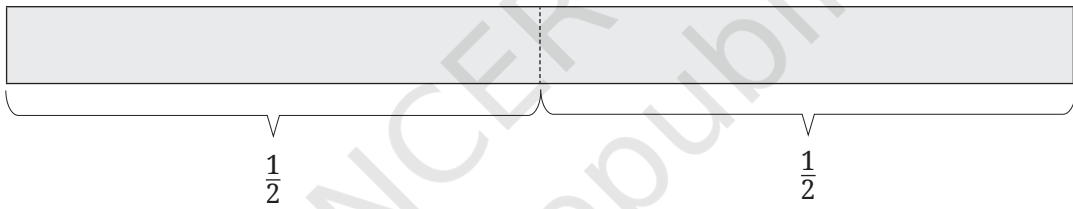
डिनल तस्वीर में हिक पूरी लाई डेखारी वेई आहे।

7.3 अणपूर एकनि दवारां मापणु

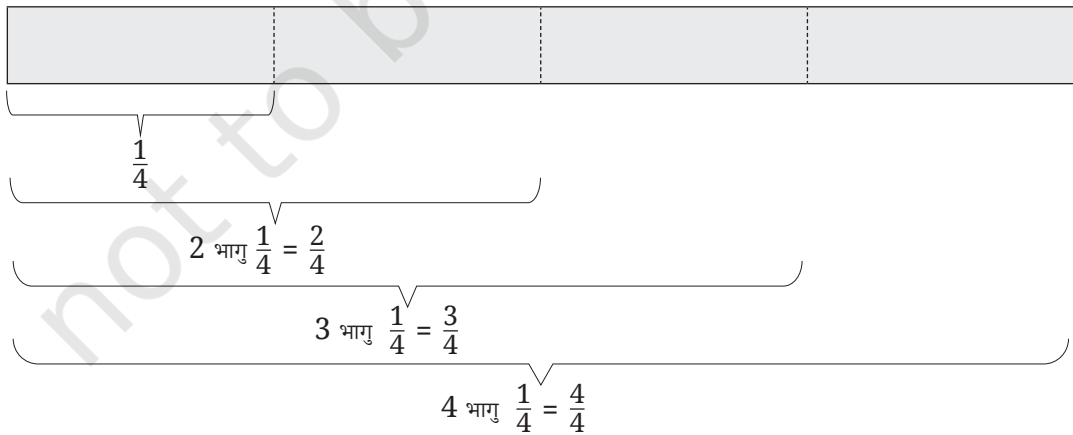
हिक कागर जी पटी खणो । असां हिन कागर जी पटीअ खे हिकु एको ड्रिघो मर्जीदासीं ।



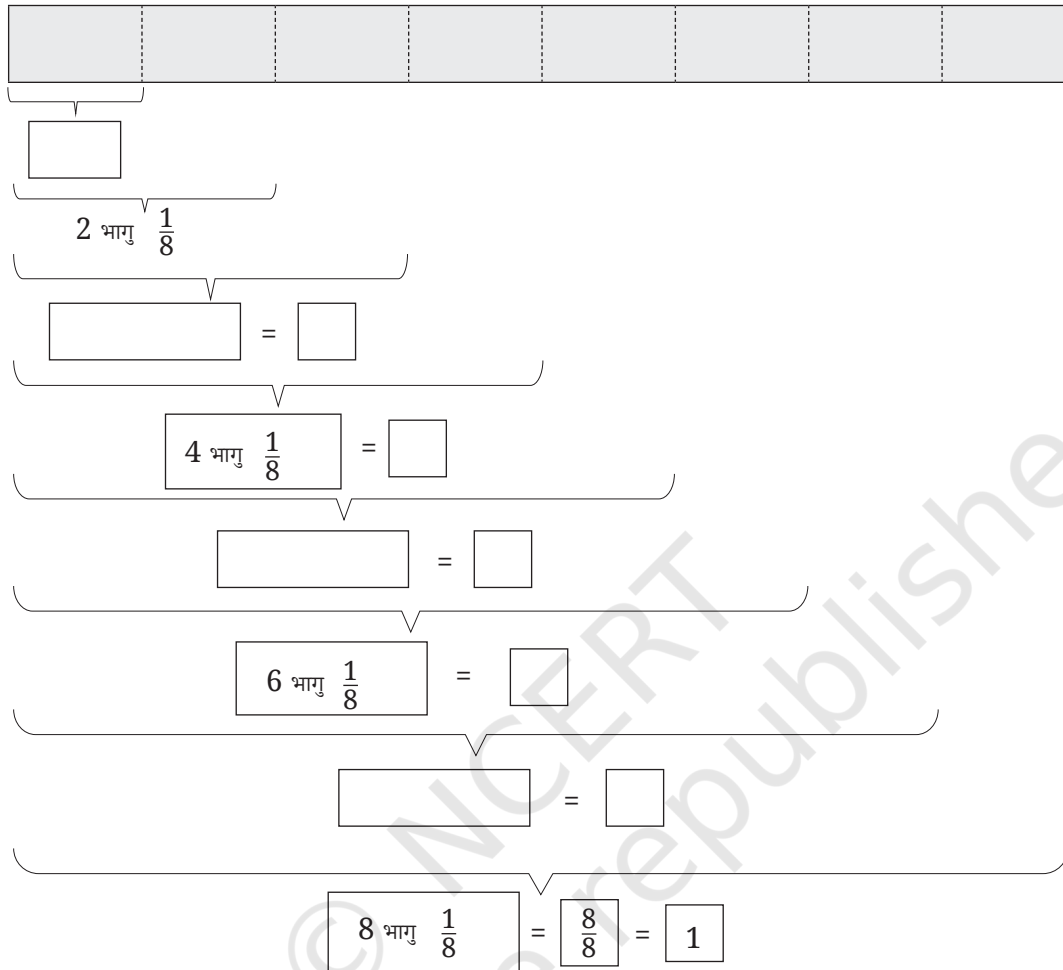
पटीअ खे बिनि बराबर भाडनि में मोड़ियो ऐं पटीअ खे वरी खोलियो । पटीअ जी ड्रेघि खे हिकु एको मर्जीदे, मुड़ण जे निशान (क्रीज़) सां ठहियल बिनि भाडनि जी ड्रेघि केतिरी आहे?



अगु में मुड़ियल पटीअ खे वरी बिनि बराबर भाडनि में मोड़ियो त तव्हां खे छा हासिलु थिये थो? हाणे तव्हांखे चारि बराबर भाडा मिलनि था ।



हिनजो वरी दुहिराउ ! करियो ऐं खाली बाँक्स में लिखो ।



અળપૂર અંગનિ ઁ અળપૂર ઁકા ઇસ્ટેમાલ કરે માપે સઘિજે થો ।

हिकु ब्रियो मिसालु था खणूं,



હિક સાલિમુ ફુલ્કે
 खे डेखारे थो ।

				
$\frac{1}{2}$ = 1 अर्ध भाग	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ = 2 अर्ध भाग	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ = 3 अर्ध भाग	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ = 4 अर्ध भाग	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ = 5 अर्ध भाग

असां अणपूर एकनि खे गडे बि बुधाए सघूं था त कुलु घणी मात्रा आहे ।

☀ अचो अभ्यासु करियूं

1. $1/2$ जी फ़हरिस्त खे 2 बियनि क़दमनि ताई जारी रखो ।
2. छा तव्हां $1/4$ लाइ सागी फ़हरिस्त ठाहे सघो था ?
3. कागर जी पटीअ जी मददि सां $1/3$ ठाहियो । छा तव्हां $1/6$ लाइ इन खे इस्तेमाल करे सघो था ।
4. हिक तस्वीर ठाहियो ऐं हेठियनि मुताबिक जोडु कथनु (addition statement) लिखो---
 अ. $1/4$ फुल्के जा 5 भेरा (times)
 ब. $1/4$ फुल्के जा 9 भेरा
5. हरहिक अणपूर एके जी जोगी तस्वीर सां जोड़ी ठाहियो—:

$$\frac{1}{3}$$



$$\frac{1}{5}$$



$$\frac{1}{8}$$



$$\frac{1}{6}$$



अणपूर पढ़णु

असां अणपूर $3/4$ खे घणो करे 'मुनो' या 'ट्रे भाडो चारि' पढ़दा आहियूं, पर हिनखे '3 ज़र्बियां $1/4$ ' वांगे पढ़ण सां असांखे अणपूर जे आकार खे समुझण में मददि मिलंदी आहे, छाकाणि त इन सां साफ़ु ज़ाहिरु थींदो आहे त अणपूर एको ($1/4$) आहे ऐं हिते अहिड़ा 3 अणपूर एका आहिनि ।

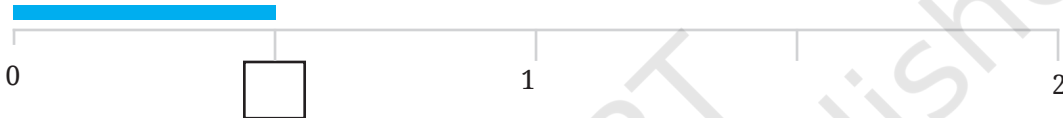
यादि करियो, असां अणपूर जे मथिएं अंग ऐं हेठिएं अंग खे छा चवंदा आहियूं । अणपूर $5/6$ में, 5 अंसु आहे ऐं 6 छेदि आहे ।

मास्तरनि लाइ टिप

बारनि खे मुख्तलिफ़ शिकिलूं, जीअं- गोलु, चौरसि, मुस्ततीलु, ट्रिंकुंडो वगैरह जो इस्तेमाल करे अणपूर एकनि खे समुझण जा वझ ड़ियो ।

7.4 अददु-लीक ते अणपूर जी माप जा निशान लगाइणु

असां अददु-लीक (number line) ते 1,2,3,... एकनि जा माप जा बराहर निशान लगाया आहिनि । अचो, हाणे अददु-लीक ते अणपूर जे माप जा निशान लगाइणु जी कोशिश करियूं । बिलू रेखा जी ड़ेघि घणी आहे? बॉक्स में उहो अणपूर लिखो जेको बिलू रेखा जी ड़ेघि बुधाए थो ।



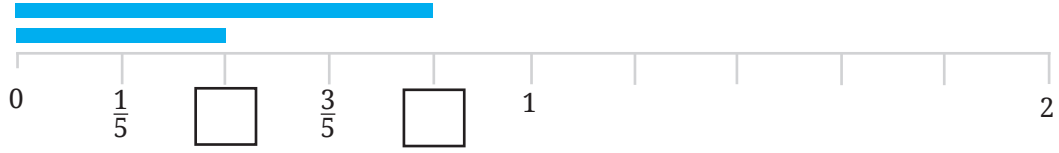
0 ऐं 1 जे विच जी दूरी हिकु एको ड़िघी आहे । इहा दूरी बिनि बराबर भाडनि में विरिहायल आहे ऐं हरहिक भाडे जी ड़ेघि $1/2$ एको ड़िघी आहे । इन करे बिलू रेखा $1/2$ एको ड़िघी आहे ।

☀ हाणे,,छा तू तरह तरह जी नीरे टुबके जी लम्बाई नापे सिघो था? बाक्स खे सुठे नमूने भरो ।

1. हाणे, छा तव्हां हेठि ड़िनल जुदा-जुदा बिलू लीकुनि जी ड़ेघि बुधाए था सघो? उनहनि खे बॉक्स में लिखो ।



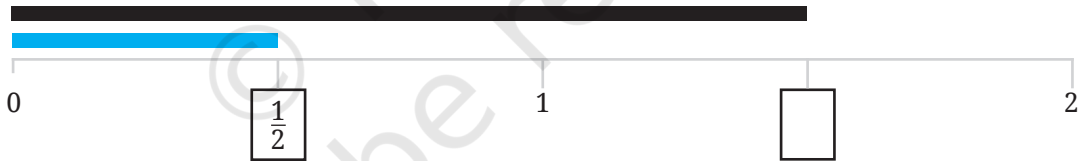
2. हिते हिक एके खे 5 बराबर भाडनि में वंढियो वियो आहे । बिलू रेखा जी ड़ेघि बुधाइण वारे अणपूर खे बॉक्स में या पंहिंजी कापीअ में लिखो ।



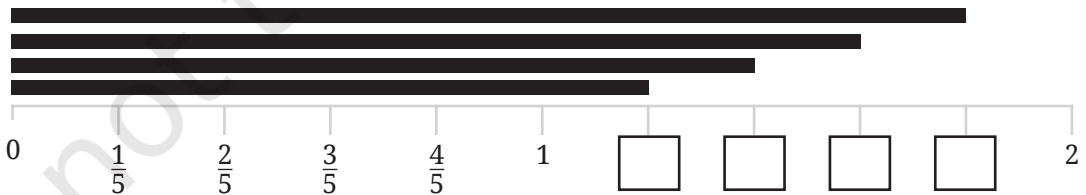
3. हाणे हिक एके खे 8 बराबर भाडनि में विरिहायो वियो आहे। सही अणपूर खे डिनल बॉक्स में या पंहिंजी कापीअ में लिखो।

 अचो, अभ्यासु करियूं

1. अददु लीक ते $1/10$, $3/10$, ऐं $4/5$ ड्रेघि जी लीकुनि खे डेखारियो।
2. पंहिंजी पसंदीअ जा पंज बिया अणपूर लिखो ऐं उन्हनि खे अददु-लीक ते ज़ाहिरु करियो।
3. 0 ऐं 1 जे विच में घणा अणपूर थींदा आहिनि? वीचारु करियो, पंहिंजे हम-क्लासियुनि सां बहस-मुबाहिसो करियो ऐं लिखो।
4. हेठि डिनल बिलू रेखा ऐं कारी रेखा जी ड्रेघि केतिरी आहे? 0 ऐं 1 जे विच जी दूरी 1 एको ड्रेघि आहे ऐं हिते हीअ बिनि बराबर भाडनि में विरिहाई वेई आहे। इनकरे हरहिक भाडे जी ड्रेघि $1/2$ आहे। इनकरे बिलू रेखा $1/2$ एको ड्रेघी आहे। कारी रेखा जी ड्रेघि बुधाइण वारे अणपूर खे दबे मे लिखो।



5. कारी लीकुनि जी ड्रेघि बुधाइण वारे अणपूर खे वाबस्ता बॉक्स मे लिखो।



गणित
गाल्हि

मास्तरनि लाइ टिप

हिननि लीकुनि खे तख्ते ते लीकियो ऐं शागिर्दनि खे संदनि कापीअ में जवाबु लिखण लाइ डसियो।

7.5 गडयिल अणपूर

हिक खां वडा अणपूर

तव्हां, हींअर अददु-लीक ते कुझ अणपूर निशान लगाया हुआ। छा तव्हां डिठो त सभिनी बिलू लीकुनि जी ड्रेघि 1 खां घटि हुई ऐं सभिनी कारी लीकुनि जी ड्रेघि 1 खां वधीक हुई?

उहे सभेई अणपूर लिखो जिनि खे तव्हां पहिरीं अददु-लीक ते निशान लगाया हुआ।

अचो, हाणे इहे अणपूर बिनि टोलनि में विरिहायूं:

1 एके खां नंढी ड्रेघि	1 एके खां वडी ड्रेघि

☀ छा तव्हां ध्यानु डिनो त 1 एके खां वडे अणपूर में कुझ गाल्हियूं सागियूं आहिनि?

1 एके खां नंढे अणपूर में अंसु, छेद खां नंढो आहे, जेतोणीकि 1 एके खां वडे अणपूर में अंसु, छेद खां वडो आहे।

असां खे ज्ञाण आहे त $3/2$, $5/2$ ऐं $7/2$ सभेई 1 एके खां वडियूं आहिनि। पर छा असीं सम्झी सधूं था त उन्हनि में घणा पूरन एका आहिनि?

$$\frac{3}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2}$$

मां सम्झां थी त $1/3 + 1/3 + 1/3 = 3/3 = 1$, जे मां 1 ऐं
 $1/3$ जोड़ियां थी, त मूखे 1 एके खां वधीक हासिलु थींदो, इनकरे
 $4/3 > 1$

गणित
 गाल्हि

अचो अभ्यासु करियूं

1. $7/2$ में घणा पूरा एका (whole units) आहिनि ?
2. $4/3$ ऐं $7/3$ में घणा पूरा एका आहिनि ?

हिक खां वडे अणपूर खे गड़ियल अंगनि वांगुरु लिखणु

असां डिठो आहे त: $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$.

साग्रिये नमूने असां बिया अणपूर बि लिखी सघूं था । मिसालु तौर,

$$\frac{4}{3} = \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}}_{=1} + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{3}.$$

$$3 \times \frac{1}{3} = 1$$

अचो अभ्यासु करियूं

1. हेठि डिनल हर-हिक अणपूर में सज्जनि एकनि जे अंगनि जो हिसाबु लगायो:

क. $\frac{8}{3}$

ख. $\frac{11}{5}$

ग. $\frac{9}{4}$

असां डिठो

$$\frac{8}{3} = 2 + \frac{2}{3}$$

अणपूर गड़ियलु अंगु

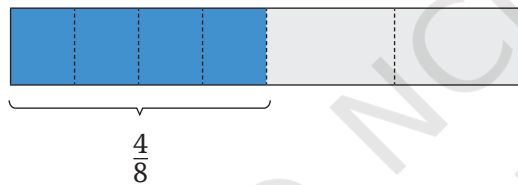
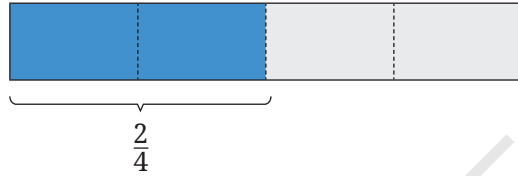
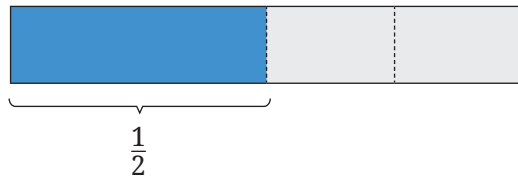
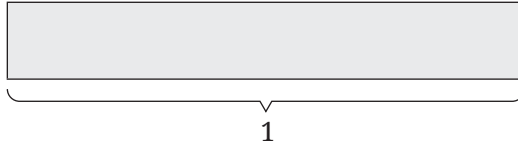
इन नमूने हिन अंग खे 'ब सही ब भाडो ट्रे' बि चयो
 वेदो आहे । असां इनखे $2 \frac{2}{3}$ वांगुरु बि लिखी सघूं
 था ।

2. छा 1 खां वडनि सभेई अणपूर अंगनि खे इन नमूने गड़ियल अंगनि (mixed numbers)
 वांगुरु लिखी सघूं था ?

हिक गड़ियल अंग/ गड़ियल अणपूर में हिकु सजो अंगु हूंदो आहे (जेको सजो भाडो सडाईदो आहे)
 ऐं उहो अणपूर जेको हिक खां घटि हूंदो आहे (उहो अणपूर-भाडो सडाईदो आहे)

हिक जेडे अणपूरनि जी ड्रेचि हासिलु करण लाइ अणपूर पटीअ जो इस्तेमाल करणु !

पोयें भाडे में तव्हां क्रिस्में-क्रिस्में जा अणपूर ज़ाहिरु करण लाइ अणपूर एकनि वारे पेपर फोल्डिंग (पटीअ) जो इस्तेमालु कयो हुओ। अचो, सागी पेपर पटीअ सां गड्डु का बी मशगूली करियूं।



तव्हां छा था डिसो

- छा $1/2$ ऐं $2/4$ जी ड्रेचि हिक जेडी आहे?
 - छा $2/4$ ऐं $4/8$ जी ड्रेचि बराबर आहे?
- असां चई सघूं था त $1/2 = 2/4 = 4/8$

इहे 'तुल अणपूर' (equivalent fractions) आहिनि, जेके सागी ड्रेचि खे ज़ाहिरु कनि था, पर इन्हनि खे जुदा-जुदा अणपूर एकनि जे पैमाने में इज़िहारु कयो वियो आहे।

हाणे कागर जी पटियुनि जो इस्तेमाल करे डिसो त छा $1/3$ ऐं $2/6$ तुल अणपूर आहिनि या न?

हेठि डिनल तस्वीर जे मुताबिकु डिनल पटियुनि जो इस्तेमाल करे हिक अणपूर भिति जो सिरिजणु करियो।

☀ अणपूर भिति (fractional wall) डिसी, हेठि लिखियल सुवालनि जा जवाब डियो।



1. छा $1/2$ ऐं $3/6$ जी ड्रेचि बराबर

आहे?

2. छा $2/3$ ऐं $4/6$ तुल अणपूर c आहिनि? छो?

3. $1/6$ ड्रेघि जे केतरनि टुकुरनि मां $1/2$ ड्रेघि हासिलु थींदी

4. $1/6$ ड्रेघि जे केतरनि टुकुरनि मां $1/3$ ड्रेघि हासिलु थींदी ?

असां हिन वीचार खे वधाईंदे, अणपूर एके $1/10$ वारी अणपूर पटीअ जी भिति अड्डाए सघूं था। (अणपूर जी हीअ भिति किताब जे आखिरि में डिनल आहे।)

1 एको									
$\frac{1}{2}$					$\frac{2}{2}$				
$\frac{1}{3}$			$\frac{2}{3}$			$\frac{3}{3}$			
$\frac{1}{4}$		$\frac{2}{4}$		$\frac{3}{4}$		$\frac{4}{4}$			
$\frac{1}{5}$		$\frac{2}{5}$		$\frac{3}{5}$		$\frac{4}{5}$		$\frac{5}{5}$	
$\frac{1}{6}$		$\frac{2}{6}$		$\frac{3}{6}$		$\frac{4}{6}$		$\frac{5}{6}$	
$\frac{1}{7}$		$\frac{2}{7}$		$\frac{3}{7}$		$\frac{4}{7}$		$\frac{5}{7}$	
$\frac{1}{8}$		$\frac{2}{8}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{4}{8}$		$\frac{5}{8}$	
$\frac{1}{9}$		$\frac{2}{9}$		$\frac{3}{9}$		$\frac{4}{9}$		$\frac{5}{9}$	
$\frac{1}{10}$		$\frac{2}{10}$		$\frac{3}{10}$		$\frac{4}{10}$		$\frac{5}{10}$	

अचो अभ्यासु करियूं

1. छा $3/6$, $4/8$, $5/10$ तुल अणपूर आहिनि? छो?

2. $2/6$ लाइ ब तुल अणपूर लिखो।

3. $\frac{4}{6} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \dots\dots\dots$ (जेसिताई थी सघेव, ओसिताई लिखो।)

हिक जेडे भाडनि खे इस्तेमाल करे तुल अणपूर समुझणु

हिक फुल्के खे चइनि बारनि में बराबर विरिहायो वियो । हरहिक बार खे फुल्के जो केतिरो भाडो हासिलु थियो ?

डिनल तस्वीर में चइनि बारनि मंझि फुल्के जो विरिहाडो डेखारियो वियो आहे ।

हर हिक बार खे फुल्के जो अणपूर $\frac{1}{4}$ मिलियो आहे ।

तव्हां हिन वाक्रिए खे वंड, जोड़, ऐं ज़र्ब तरीके सां बि ज़ाहिरु करे सघो था ।

$$\text{वंड तरीके सां } 1 \div 4 = \frac{1}{4}.$$

$$\text{जोड़ तरीके सां } 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}.$$

$$\text{ज़र्ब तरीके सां } 1 = 4 \times \frac{1}{4}.$$

☀ अचो, अभ्यासु करियूं

- ट्रिनि फुल्कनि खे चइनि बारनि मंझि बराबर विरिहायो वियो । तस्वीर में “वंड” ज़ाहिरु करियो ऐं हरहिक बार खे अणपूर में केतिरो भाडो हासिलु थियो, लिखो । वाबस्ता वंड रीति, जोड़ रीति, ऐं ज़र्ब रीति बि लिखो ।

हरहिक बार खे फुल्के जो भाडो मिलियो _____.

वंड रीति----

जोड़ रीति----

ज़र्ब रीति:

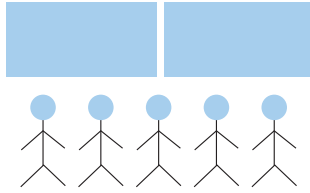
तव्हां हिन तस्वीर ऐं वाबस्ता जवाबनि जी भेट हमक्लासियुनि सां करियो ।



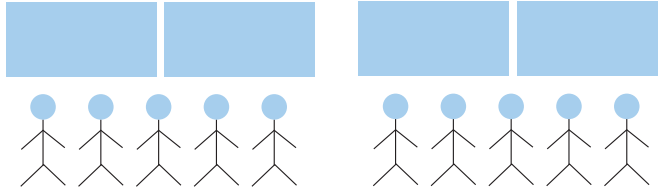
हाणि, जडहिं मुंहिंजे टोले में 10 बार
आहिनि, मूखे घणनि केकनि जी घुरुबल
थींदी, जीअं टोले में हरहिक बार खे
अनिल जे बराबर केक हथि अचे ?

छा थींदो अगर असां ब अहिड़ा टोला गडु
रखूं ? हिकु गुटु जंहिं में 2 केक 5 बारनि मंझि
बराबर-बराबर विरिहाया वजनि ऐं बियो गुटु
जंहिं में 4 केक 10 बारनि मंझि विरिहाया
वजनि ?

हिक सार 1



हिक सार 2



इन नमूने, बिन्ही सूरतुनि में हरहिक बार खे हिक जेतिरे हिसो मिलंदो !

इनकरे $2/5 = 4/10$

2. तस्वीर ठाहे डेखारियो, जडहिं 2 फुल्का 4 बारनि में बराबर-बराबर विरिहाइजनि, तडहिं हरहिक बार खे केतिरो हिसो मिलंदो, हिनखे वाबस्ता वंड, जोड़, ज़र्ब तरीकनि सां बि हलु करे डेखारियो।

3. अनिल हिक टोले (group) में हो, जंहिमें 2 केक 5 बारनि में बराबर विरिहाया विया। अनिल खे केक जो केतिरो हिसो मिलियो हूंदो?

अचो, असां हेठि डिनल सूरतुनि में हरहिक बार जे हिसे जी जाच करियूं।

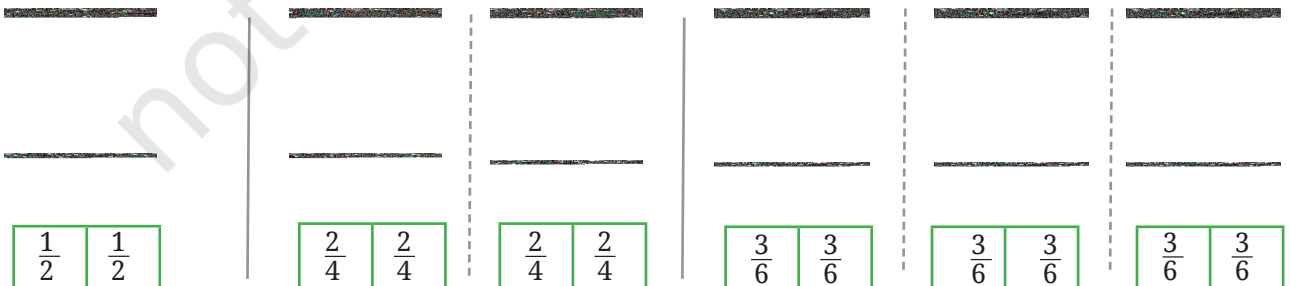
- 1 फुल्को 2 बारनि में बराबर विरिहायो वजे थो।
- 2 फुल्का 4 बारनि में बराबर विरिहाया वजनि था।
- 3 फुल्का 6 बारनि में बराबर विरिहाया वजनि था।

अचो, तस्वीर ठाहियूं ऐं बियनि सां साझा करियूं। छा तव्हां ध्यानु डिनो, सभिनी सूरतुनि में हरहिक बार जो भाडो बराबर आहे? इनकरे असां चई सधूं था त $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$

1 फुल्को 2 बारनि में बराबर विरिहायो वजे थो।

2 फुल्का 4 बारनि में बराबर विरिहाया वजनि था।

3 फुल्का 6 बारनि में बराबर विरिहाया वजनि था।



अणपूर जंहिंजा भाडा बराबर थींदा आहिनि, उन्हनि खे 'तुलु अणपूर' सडिबो आहे।

इनकरे $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ ऐं $\frac{3}{6}$ सभेई तुल अणपूर आहिनि ।

$\frac{1}{2}$ जा कुझ बिया बि तुल अणपूर मालूम करियो । उन्हनि खे हेठि डिनल दबनि में लिखो ।

--	--	--	--

हेठि डिनल सूरतुनि में फुल्कनि खे बराबर-बराबर विरिहायो ऐं हरहिक बार जो हिसो बुधायो । छा हिननि सभिनी सूरतुनि में हरहिक बार जो हिसो बराबर आहे ? छो ?

2 फुल्कनि खे 3 बारनि में बराबर भाडनि में विरिहायो वियो ।

4 फुल्कनि खे 6 बारनि में बराबर भाडनि में विरिहायो वियो ।

6 फुल्कनि खे 9 बारनि में बराबर भाडनि में विरिहायो वियो ।



$\frac{2}{3}$ अणपूर खे $\frac{4}{6}$ जो सभ खां सादो रुप चइबो आहे । हीउ $\frac{6}{9}$ जो बि सादो रुप आहे ।

छा तव्हां हरहिक अणपूर में अंसु ऐं छेद में लागापे बाबति कुझ ध्यानु डिनो आहे ?

☀ अचो, अभ्यासु करियूं गाइब अंग मालूम करियो:

क. 5 गिलास जूस 4 दोस्तनि में हिक जेतिरो विरिहायो वियो, इहो जूस 8 दोस्तनि मंझि बराबर-बराबर विरिहायल गिलास जूस जे बराबर आहे ।

$$\text{इनकरे } \frac{5}{4} = \frac{\square}{8}$$

ख. 4 किलो पटाटनि खे बराबर-बराबर 3 थैल्हनि में भरियो वियो । इऐं ई 12 किलो पटाटनि खे बराबर-बराबर भरण लाइ _____ थैल्हनि जी घुरुबल थींदी ? $\frac{4}{3} = \frac{12}{\square}$

गणित
गाल्हि

ग. 5 बारनि मंझि बराबर-बराबर विरिहायल 7 फुल्का ऐं _____ बारनि मंझि बराबर विरिहायल _____ फुल्का बराबर आहिनि।

$$\text{so, } \frac{7}{5} = \frac{\square}{\square}$$

☀ कहिड़े टोले में हरहिक बार खे वधीक लाई मिलंदी?

1 लाईअ खे 2 बारनि में बराबर विरिहायो वजे या 5 लायुनि खे 8 बारनि में बराबर विरिहायो वजे।

मुक्ता: इन लाइ असां खे $\frac{1}{2}$ ऐं $\frac{5}{8}$ मंझि भेट करणु घुरिजे त कहिड़ो अणपूर वधीक आहे?

शबनम: ठीकु आहे, असां डिठोसीं त $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$ आहे, ज़ाहिरु आहे--- $\frac{4}{8} < \frac{5}{8}$ इनकरे जिनि बारनि लाइ 5 लायुनि खे 8 बारनि में बराबर विरिहायो वजे थो, उन्हनि बारनि खे उन्हनि खां वधीक लाई मिलंदी, जिनि लाइ 1 लाईअ खे 2 बारनि में बराबर विरिहायो वियो। बियें टोले जे हरहिक बार खे वधीक लाई मिलंदी।

☀ हेठि डिनल टोले बाबति छा चवंदा? कंहिं टोले जे हरहिक बार खे वधीक हिसो मिलंदो?

1 लाईअ खे 2 बारनि में बराबर विरिहायो वजे या 4 लायुनि खे 7 बारनि में बराबर विरिहायो वजे।

शबनम— हिन भेरे कंहिं टोले जे बारनि खे वधीक लाई मिलंदी?

मुक्ता-- असांखे— $\frac{1}{7}$ ऐं $\frac{4}{7}$ जी भेट करणु घुरिजे।

हाणि

$$\frac{1 \times 4}{2 \times 4} = \frac{4}{8} \text{ so, } \frac{1}{2} = \frac{4}{8}.$$

शबनम-- पर तव्हां अंस ऐं छेद खे बीहर 4 सां ज़र्बु छो कयव?

मुक्ता --- तू डिसंदीअ

जडहिं 4 लायुनि खे 7 बारनि में बराबर विरिहायो वजे थो, त हरहिक बार खे $\frac{4}{7}$ लाई मिले थी। जडहिं 4 लायुनि खे 8 बारनि में बराबर विरिहायो वजे थो, त हरहिक बार खे $\frac{4}{8}$ लाई मिले थी। इनकरे $\frac{4}{7} > \frac{4}{8}$

जेकडहिं विरिहाइजदइ एकनि जी गुणपसागी आहे, पर बारनि (जिनि जे विच में एका विरिहाइणा आहिनि) जी गुणप वधीक आहे, त हिसो घटि थी वेदो ।

इनकरे, $4/7 > 4/8$ ऐं $4/8 = 1/2$, त $4/7 > 1/2$
हाणे मूखे समझ में आयो त तव्हां अंस ऐं छेद खे 4
सां ज़र्ब छो कयव

☀ फ़र्जु करियो बारनि जी गुणप सागी आहे, पर विरिहाइण वारे एकनि जी गुणप वधीक आहे । हाणे हरहिक बार खे मिलण वारे हिसे बाबति तव्हां छा चवंदा? छो? बहसु-मुबाहिसो करियो । तव्हांजी दलील कीअं ज़ाहिर कंदी त $1/5 < 2/5$, $3/7 < 4/7$, ऐं $1/2 < 5/8$

☀ हाणि, फ़ैसिलो करियो त बिन्ही टोलनि मां कहिड़े टोले जे बारनि खे वधीक भाडो मिलंदो:

1. टोलो 1--- 3 गिलास कमंद जो रसु 4 बारनि में बराबर विरिहायो वियो ।
टोलो 2--- 7 गिलास कमंद जो रसु 10 बारनि में बराबर विरिहायो वियो ।
2. टोलो 1--- 4 गिलास कमंद जो रसु 7 बारनि में बराबर विरिहायो वियो ।
टोलो 2--- 5 गिलास कमंद जो रसु 7 बारनि में बराबर विरिहायो वियो ।

कहिड़नि टोलनि जी भेट करणु सवलो आहे? छो

शबनम--- पहिरियें बिनि टोलनि जी भेट करण लाइ असां खे
अणपूर $3/4$ ऐं $7/10$ जो तुलु अणपूरु हासिलु करिणो पवंदो ।
मुक्ता--- छा हिन रीति $6/8 = 3/4$ ऐं $21/30 = 7/10$?

छा इऐं नाहे, जडहिं बारनि जी गुणप
बराबर आहे त भेट करणु सवलो आहे ।

गणित
गाल्हि

शबनम--- हिते हिक शर्त आहे। ब अणपूर इस्तेमाल करण लाइ कतबि आयलु अणपूर एको (fractional unit) बराबर हुजणु घुरिजे! जीअं --- $\frac{2}{6}$ ऐं $\frac{3}{6}$ बिन्ही में अणपूर एको $\frac{1}{6}$ आहे (मतिलबु, छेद सागिया आहिनि)। पर $\frac{6}{8}$ ऐं $\frac{21}{30}$ में अणपूर एका सागा कोन आहिनि (बिन्ही में छेद अलग-अलग आहिनि)। मुक्ता--- ठीकु आहे, अचो असीं तुलु अणपूर ठाहिण शुरु था करियूं ---

$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16} = \frac{15}{20} \dots$ पर मूंखे कडहिं रुकिणो आहे?

शबमन— सम्झी वेईअं! कींअ रहंदो, जे असीं $4 \times 10 = 40$ ताई लिखूं।

मुक्ता--- इनजो मतिलबु बिनि छेदनि जी ज़र्ब-उपति (product)?

ठीकु आहे !

असां वटि $\frac{3}{4}$ ऐं $\frac{7}{10}$ आहिनि। बिन्ही छेदनि (4 ऐं 10) जी ज़र्ब-उपति 40 आहे।

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16} = \frac{15}{20} = \frac{18}{24} = \dots = \frac{27}{36} = \frac{30}{40}.$$

$$\frac{7}{10} = \frac{14}{20} = \frac{21}{30} = \frac{28}{40}.$$

जडहि ताई असीं पहुंचउ
ज़र्ब-उपति 40

पर ध्यान डिजे त $\frac{15}{20}$ ऐं $\frac{14}{20}$ जा छेद
बि सागिया आहिनि।

हाउ! असां खे हरहिक अणपूर लाइ रुगो सागा
अणपूर एका हासिल करण जी घुरुबल आहे।

शबनम--- इनकरे सागियनि अणपूर एकनि (सागिया छेद) $\frac{3}{4}$ ऐं $\frac{7}{10}$ जा तुल अणपूर $\frac{30}{40}$ ऐं $\frac{28}{40}$ या

$\frac{15}{20}$ ऐं $\frac{14}{20}$ आहिनि।

ज़ाहिरु आहे $\frac{30}{40} > \frac{28}{40}$, इनकरे असां चई था सघूं त $\frac{3}{4} > \frac{7}{10}$

☀ हेठि डिनल अणपूर जोड़नि (pairs of fractions) लाइ तुल अणपूर (equivalent fractions) हासिलु करियो, जंहिं में अणपूर एका सागा हुजनि ।

क. $\frac{7}{2}$ ऐ $\frac{3}{5}$

ख. $\frac{8}{3}$ ऐ $\frac{5}{6}$

ग. $\frac{3}{4}$ ऐ $\frac{3}{5}$

घ. $\frac{6}{7}$ ऐ $\frac{8}{5}$

ङ. $\frac{9}{4}$ ऐ $\frac{5}{2}$

च. $\frac{1}{10}$ ऐ $\frac{2}{9}$

छ. $\frac{8}{3}$ ऐ $\frac{11}{4}$

ज. $\frac{13}{6}$ ऐ $\frac{1}{9}$

हिक अणपूर जी नंढे मां नंढी सूरति ज़ाहिरु करणु

कंहिं अणपूर जे अंस ऐं छेद जो 1 खां सवाइ बियो को आम पूरो-वंडीदड़ु न हुजे, त उहा अणपूर जी नंढे मां नंढी सूरत सडाईदी आहे। बियनि लफ़ज़नि में, हिक अणपूर जी सूरति नंढे मां नंढी तडहिं चई सघिबी, जडहिं हुनजो अंसु ऐं छेदु नंढे मां नंढो हुजे।

कंहिं बि अणपूर जी नंढे मां नंढी सूरति ज़ाहिरु करणु लाइ हिकु तुलु अणपूर मालूम करे सघिजे थो, जंहिं जो अंसु ऐं छेदु जेतिरो मुमकिनु थी सघे, नंढे मा नंढो हुजे।

अचो, सम्झू त कीअं अणपूर जी नंढे मां नंढी सूरति ज़ाहिरु करे सघिबी आहे।

मिसालु—छा अणपूर $16/20$ नंढे मां नंढी सूरत में आहे? न, अंग 16 ऐं 20 जो आम पूरो वंडीदड़ु 4 आहे। अचो, हाणे $16/20$ खे नंढे मां नंढी सूरत में ज़ाहिरु करियूं।

असां खे ज़ाण आहे त 16 (अंसु) ऐं 20 (छेद) बई 4 सां वंडण जोगा/ वंडिजंदड़ु आहिनि।

$$\text{इनकरे } 16 \div 4 / 20 \div 4 = 4/5$$

हाणे, 4 ऐं 5 जो को बियो आम पूरो-वंडीदड़ु कोन आहे। इनकरे $16/20$ जी नंढे मां नंढी सूरति $4/5$ आहे। इनकरे $4/5$ खे $16/20$ जो नंढे मां नंढी सूरत चई सघिजे थो, छाकाणि 4 ऐं 5 जो 1 खा सवाइ बियो को बि आम पूरो वंडीदड़ु कोन आहे।

कंहिं बि अणपूर जे अंस ऐं छेद खे सभ खां वड्डे आम पूरे-वंडीदड़ु सां वंड करे नंढे में नंढी सूरत में मटे सघिजे थो।

हिक अणपूर खे नंढे मां नंढी सूरत (lowest terms) में इज़िहार करणु बि डाकनि (steps) में करे सघिजे थो।

फ़र्जु करियो, असांखे 30/60 जी नंढे मां नंढी सूरति जो इज़िहार करिणो आहे। सभ खां पहिरीं असीं डिसंदासीं त अंसु ऐं छेदु बई बधी अंग (even numbers) आहिनि। असां बिन्ही खे 2 सां वंडींदासीं ऐं डिसूं था, हासिलु थिए थो, $36/60 = 18/30$

वरी डिसूं था त अंसु ऐं छेदु बई बधी अंग आहिनि, इनकरे असां वरी इन्हनि खे 2 सां वंडींदासीं ; असांखे $18/30 = 9/15$ मिले थो।

हाणे असां डिसूं था त 9 ऐं 15 बई 3 जा ज़र्बीन्दड़ (multiples) आहिनि, इनकरे बिन्ही खे 3 सां वंडण ते $9/15 = 3/5$ हासिलु थिए थो।

हाणे 3 ऐं 5 जो 1 खां सवाइ बियो को आम पूरो-वंडीदड़ (common factor) कोन आहे, इनकरे $36/60$ जी नंढे मां नंढी सूरति आहे $3/5$ ।

बीं सूरत में, असां डिसूं था त $36/60$ में अंसु ऐं छेदु बई 12 जा ज़र्बीन्दड़ (multiple) आहिनि--- $36 = 3 \times 12$ ऐं $60 = 5 \times 12$, इनकरे असीं इहो सिधो नतीजो कढी सघूं था त $36/60 = 3/5$ आहे।

तव्हां कंहिं बि तरीके सां करियो, हिकु ई जवाबु मिलंदो ! पर कडहिं-कडहिं डाकनि (steps) में हलु करणु सवलो थींदो आहे।

अचो, अभ्यासु करियूं

हेठि डिनल अणपूरनि जी नंढे मां नंढी सूरति (lowest term) ज़ाहिरु करियो:

क. $\frac{17}{51}$

ख. $\frac{64}{144}$

ग. $\frac{126}{147}$

घ. $\frac{525}{112}$

7.7 अणपूर जी भेट

असां खे मालूम आहे त उहे अणपूर जिनिजो छेदु सागियो हुजे, उन्हनि जो तुलु अणपूर कीअं हासिलु थींदो।

अचो डिसूं असां हिनखे कीअं कतबि

आणे सघूं था:

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \times 9}{5 \times 9} = \frac{36}{45}$$

$$\frac{7}{9} = \frac{7 \times 5}{8 \times 5} = \frac{35}{45}$$

5 ऐं 9 जो आम ज़र्बीन्दड़ 45 आहे, इनकरे असां 45 खे आम छेद वांगुरु इस्तेमाल करे सघूं था।

जाहिर आहे, $\frac{36}{45} > \frac{35}{45}$

इनकरे, $\frac{4}{5} > \frac{7}{9}$!

अचो, हिनजी कंहिं बिये जोड़े, $7/9$ ऐं $17/21$ लाइ कोशिश करे डिसूं।

ऐं 21 जो आम जर्बीदडु 63 आहे, असीं लिखी सघूं था:

$$\frac{7}{9} = \frac{7 \times 7}{9 \times 7} = \frac{49}{63}, \quad \frac{17}{21} = \frac{17 \times 3}{21 \times 3} = \frac{51}{63}.$$

इनकरे, $\frac{49}{63} < \frac{51}{63}$. So, $\frac{7}{9} < \frac{17}{21}$!

थोरे में!

बिनि या बिनि खां वधीक अणपूरनि जे माप जी भेट जा डाका:

डाको 1: डिनल अणपूर खे तुल अणपूर में मटियो जीअं इन्हनि खे सागिये छेद या सागिये अणपूर एके में इजिहार करे सघिजे।

डाको 2: हाणे रुगो अंस जी भेट करे, तुल अणपूर जी भेट करियो मतिलबु हरहिक में केतिरा अणपूर एका आहिनि।

☀ अचो अभ्यासु करियूं

1. हेठि डिनल अणपूर जी भेट करियो ऐं पंहिंजे जवाब जो सबबु पिणि बुधायोrs:

क. $\frac{8}{3}, \frac{5}{2}$

ख. $\frac{4}{9}, \frac{3}{7}$

ग. $\frac{7}{10}, \frac{9}{14}$

घ. $\frac{12}{5}, \frac{8}{5}$

ङ. $\frac{9}{4}, \frac{5}{2}$

2. हेठि डिनल अणपूरनि खे नंढे खां वडे (Ascending Order) सिलसिले में लिखो।

क. $\frac{7}{10}, \frac{11}{15}, \frac{2}{5}$

ख. $\frac{19}{24}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12}$

3. हेठि डिनल अणपूरनि खे वडे खां नंढे सिलसिले में लिखो।

क. $\frac{25}{16}, \frac{7}{8}, \frac{13}{4}, \frac{17}{32}$

ख. $\frac{3}{4}, \frac{12}{5}, \frac{7}{12}, \frac{5}{4}$

7.8 अणपूरनि खे जोड़णु ऐं कटणु

मीना जे पीउ कुझु लाइयूं ठाहियूं। मीना इनजो $1/2$ भाडो खाधो ऐं संदसि नंढे भाउ इनजो $1/4$ हिंसो खाधो। मीना ऐं हुनजे भाउ कुलु लाईअ जो केतिरो हिंसो खाधो?

असां काल्पनिक तस्वीर ज़रीए हिन जवाब ताई पहुची सधूं था। लाईअ जो हिकु टुकुरु खणो ऐं उनखे पहिरीं इन नमूने बिनि हिसनि में विरिहायो।

तस्वीर जे मुताबिकु मीना इनजो अधु भाडो खाधो।

हाणे बाकी बचियल हिसे खे वरी बिनि भाडनि में विरिहायो जीअ तस्वीर में डेखारियो वियो आहे। इन मां हरहिकु टुकुरु सालिमु लाईअ जो $1/4$ भाडो आहे।

तस्वीर सां ज़ाहिरु आहे त मीना जे भाउ पूरी लाईअ जो $1/4$ भाडो खाधो।

कुलु खाधल लाई आहे, $1/2$ (मीना द्वारां) ऐं $1/4$ (उनजे भाउ द्वारां)

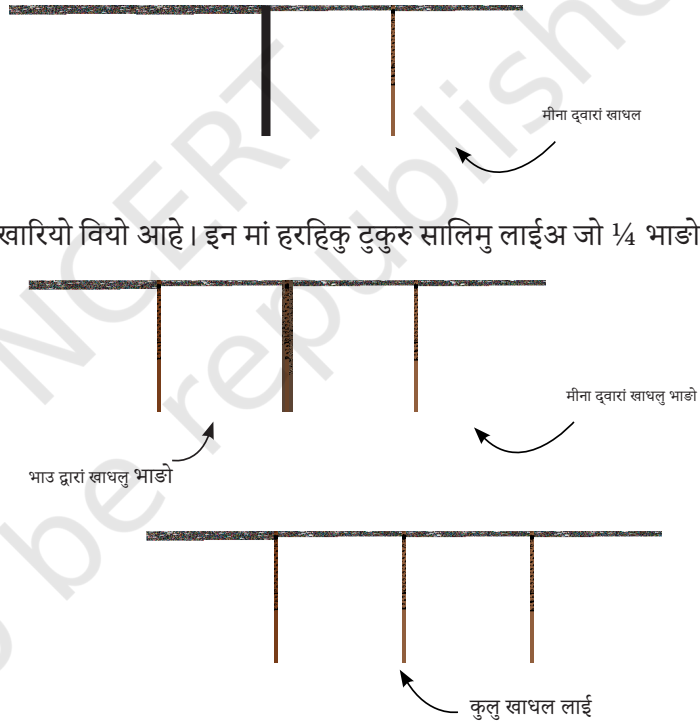
कुलु खाधल लाई

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$= 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

पूरी लाईअ जो केतिरो भाडो बाकी बचियो?

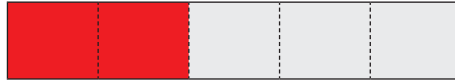


सागिये छेद या सागिये अणपूर एके वारे अणपूरनि जो जोडु

मिसालु – $2/5$ ऐं $1/5$ जो जोडु हासिलु करियो

अचो, बिन्ही खे मुस्ततील (rectangle) शिकिलि जी पटीअ द्वारां डेखारियूं था। हिते बिन्ही अणपूरनि में अणपूर एको सागियो आहे, जेको $1/5$ आहे, इनकरे हरहिक पटीअ खे 5 बराबर भाडनि में विरिहाइणो पवंदो।

इनकरे $2/5$ खे हिन नमूने डेखारियो वियो आहे —



ऐं $1/5$ खे हिन नमूने डेखारियो वियो आहे —



बिन्ही अणपूरनि जो जोडु शेड डिनल भाडनि जी कुलु गणप हासिलु करण जहिडो ई आहे, जोको हरहिक बराबर अणपूर एके $1/5$ खे डेखारे थो।

हिन तस्वीर में कुलु ढकियलु हिंसो 3 आहे। छाकाणि हरहिकु ढकियलु भाडो अणपूर एके $1/5$ खे डेखारे थो, असीं डिसूं था त 3 ढकियल भाडा गडिजी अणपूर $3/5$ खे ज़ाहिरु कनि था।

इनकरे, $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$?



मिसालु --- $4/7$ ऐं $6/7$ जो जोडु हासिलु करियो

अचो, वरी बिन्ही खे मुस्ततील (rectangle) पटीअ द्वारां डेखारियूं। हिते बिन्ही अणपूरनि (fractions) में अणपूर एको (fractional unit) सागियो आहे, मतिलबु $1/7$, इनकरे हरहिक पटीअ खे 7 बराबर भाडनि में विरिहाईदासीं।

$4/7$ खे हिन रीति डेखारे सचिजे थो

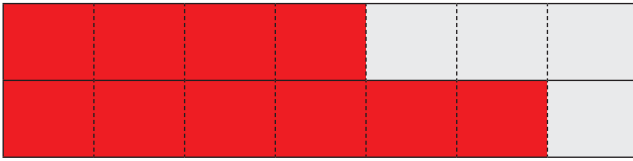


ऐं 6/7 खे हिन नमूने ज़ाहिरु करे सघिजे थो —



हेठि डिनल तस्वीर में शेड-डिनल भाडनि जी कुल गणप 10 आहे, ऐं हिनजो हरहिकु शेड-डिनलु भाडो अणपूर एके 1/7 खे ज़ाहिरु करे थो। इनकरे 10 शेड-डिनल भाडा गडिजी अणपूर 10/7 खे डेखारीनि था।

💡 हिक जेणे भाडनि इकाई वारी भाडनि खे जोडण टेम ते हरहिक जी भाडनि वारी गणप खे जोड़े रखंदा आहियूं



$$\begin{aligned}\text{इनकरे, } \frac{4}{7} + \frac{6}{7} &= \frac{10}{7} \\ &= 1 + \frac{3}{7} \\ &= 1 \frac{3}{7}.\end{aligned}$$



☀ अदद-लीक (number line) जो इस्तेमाल करे 4/7 + 6/7 खे जोड़ियो। छा तव्हांखे सागियो जवाब मिलियो?

जुदा-जुदा छेद या अणपूर एके वारे अणपूरनि जो जोड़ु

मिसालु : 1/4 ऐं 1/3 जो जोड़ु हासिलु करियो।

जुदा-जुदा अणपूर एकनि वारे अणपूरनि खे जोड़ण लाइ, पहिरीं अणपूर खे सागिये छेद या सागिये अणपूर एके वारे तुल अणपूर में मटिणो पवंदो। हिते

सागिया छेद $3 \times 4 = 12$ ठाहे सघिजनि था, मतिलबु असां अणपूर एके $1/12$ वारो तुलु अणपूरु हासिलु करे सघूं था ।

अचो, हरहिक डिनल अणपूर लाइ तुलु अणपूर (equivalent fraction) लिखूं ।

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{3}{12}, \quad \frac{1}{3} = \frac{1 \times 4}{3 \times 4} = \frac{4}{12}.$$

हाणे $3/12$ ऐं $4/12$ जो अणपूर एको सागियो आहे, जेको $1/12$ आहे ।
इनकरे, $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{7}{12}.$

जोड़ जी हीअ विधि, अणपूरनि जे अणगिणियल अंगनि ताई जोड़ण लाइ कमु करे थी । हिन तरीके खे पहिरियो भेरो ब्रह्मगुप्त सालु 628 ई. में बुधायो हो । असीं अणपूर जी ओसरि जो इतिहास पाठ में अगिते हली तप्सील सां पढंदासीं । हींअर रुगो अणपूर जे जोड़ लाइ ब्रह्मगुप्त जी रीति जे डाकनि जे सार खे समझूं था ।

अणपूरनि खे जोड़ण लाइ ब्रह्मगुप्त तरीक़ो

1. तुलु अणपूरु हासिल करियो जंहिं जे सभिनी अणपूरनि जा अणपूर एका (fractional units) सागिया हुजनि । इहो छेदनि जे आम ज़र्बीन्दड़ (common multiple) खे हासिलु करे मालूम करे सघिजे थो । मिसालु तौर, छेदनि जी ज़र्ब उपति या छेदनि जी नंढी आम भजु उपति).
2. सागिये अणपूर एकनि वारे हिननि तुल अणपूरनि खे जोड़ियो । इहो अंसनि खे जोड़े ऐं छेद खे सागियो रखी करे सघिजे थो ।
3. जेकडहिं ज़रूरत हुजे त हासिल थियल नतीजनि खे सभ खां नंढी सूरति में इज़िहार करियो ।
अचो ब्रह्मगुप्त रीति जो हिकु बियो मिसालु खणूं ।

मिसालु --- $2/3$ ऐं $1/5$ जो जोड़ हासिलु करियो ।

डिनल अणपूरनि जा छेद 3 ऐं 5 आहिनि । 3 ऐं 5 जो सभ खां नंढो आमु ज़र्बीन्दड़ (lowest common multiple) 15 आहे । हाणे असीं डिसूं था,

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 5}{3 \times 5} = \frac{10}{15}, \quad \frac{1}{5} = \frac{1 \times 3}{5 \times 3} = \frac{3}{15}.$$

इनकरे, $\frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{10}{15} + \frac{3}{15} = \frac{13}{15}$.

मिसालु--- $1/3$ ऐं $1/6$ जो जोडु हासिलु करियो।

6 ऐं 3 जो सभ खां नंढो आम ज़र्बीन्दडु 6 आहे।

$1/6$ रुगो $1/6$ ई रहंदो

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{2}{6}$$

इनकरे, $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6}$.

हाणे जेकडहिं घुरुबल हुजे त अणपूर $3/6$ खे वरी नंढे मां नंढी सूरति में ज़ाहिरु करे सघिजे थो, हीउ अंस ऐं छेद बिन्ही खे 3 (3 ऐं 6 जो सभिनी खां वडो आम ज़र्बीन्दडु) सां वंढे करे हासिलु करे सघिजे थो।):

$$\frac{3}{6} = \frac{3 \div 3}{6 \div 3} = \frac{1}{2}.$$

इनकरे, $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$.

☀ अचो अभ्यासु करियूं

1. ब्रह्मगुप्त विधि जो इस्तेमालु करे हेठि डिनल अणपूरनि जो जोडु करियो।

क. $\frac{2}{7} + \frac{5}{7} + \frac{6}{7}$ ख. $\frac{3}{4} + \frac{1}{3}$ ग. $\frac{2}{3} + \frac{5}{6}$ घ. $\frac{2}{3} + \frac{2}{7}$ ङ. $\frac{3}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$

च. $\frac{2}{3} + \frac{4}{5}$ छ. $\frac{4}{5} + \frac{2}{3}$ ज. $\frac{3}{5} + \frac{5}{8}$ झ. $\frac{9}{2} + \frac{5}{4}$ ञ. $\frac{8}{3} + \frac{2}{7}$

ट. $\frac{3}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ ठ. $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{3}{7}$ ड. $\frac{9}{2} + \frac{5}{4} + \frac{7}{6}$

2. रहीम साओ पेंट ठाहिण लाइ $2/3$ लीटर पीले पेंट खे $3/4$ लीटर बिलू पेंट सां गडियई। हुन कुल घणा लीटर साओ पेंट ठाहियो?

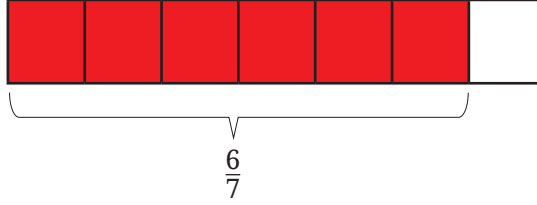
3. हिक मीटर घेरे जे मैज़पोश जूं किनारियूं ठाहिण लाइ गीता $2/5$ मीटर लेस खरीदि कई ऐं शमीम $3/4$ मीटर लेस खरीदि कई। हिननि बिन्ही द्वारां खरीदि कयल लेस जी कुल ड्रेघि मालूम करियो। छा खरीदि कयल लेस चइनी किनारनि (बॉर्डर) खे ढकण लाइ काफ़ी थींदी?

सागिये अणपूर एके या छेद वारनि अणपूरनि खे घटाइणु

अणपूरनि खे घटाईदे वक्ति बि ब्रह्मगुप्त विधि सागिये नमूने लागू थींदी आहे ।

अचो, $6/7$ मां $4/7$ खे घटाइणु जे मसइले सां शुरु करियूं, मतिलबु $6/7 - 4/7$ छा आहे?

हिन मसइले खे हलु करणु लाइ असीं मुस्ततील शिकिलि जी पटीअ जो वरी इस्तेमाल कंदासीं । बिन्ही अणपूरनि में, अणपूर एको सागियो ई आहे, i.e. $1/7$. अचो, पहिरीं वडे अणपूर खे मुस्ततील शिकिलि जी पटीअ ते ज़ाहिरु करियूं, जीअं त तस्वीर में डेखारियो वियो आहे:



हरहिकु शेड डिनलु भाडो $1/7$. खे ज़ाहिरु थो करे । हाणे असां खे $4/7$. घटाइणो आहे । इएं करण लाइ 4 शेड डिनल भाडनि खे हटाए था छडियूं ।



अणपूर भाडो जंहिं खे
हटाइणो आहे ।

हिते असां हिनखे सिधो करे सघूं था,
छाकाणि त बिन्ही अणपूरनि जा अणपूर
एका सागा आहिनि ।

इनकरे असां वटि 2 शेड डिनल भाडा बचियल आहिनि मतिलबु , $\frac{6}{7} - \frac{4}{7} = \frac{2}{7}$.

इहो अभ्यासु अददु लीक ते करण जी कोशिशु करियो ।

 अचो अभ्यासु करियूं

1. $\frac{5}{8} - \frac{3}{8}$

2. $\frac{7}{9} - \frac{5}{9}$

3. $\frac{10}{27} - \frac{1}{27}$

जुदा-जुदा अणपूर एकनि या छेदनि वारनि अणपूरनि खे घटाइणु

मिसालु: जो मुल्हु छा आहे? $\frac{3}{4} - \frac{2}{3}$?

जीअं त असां खे पहिरीं ई सागिये अणपूर एकनि वारे अणपूरनि खे घटाइणु ईदो आहे। अचो, छिनल अणपूर खे सागिये अणपूर एके वारे तुल अणपूर में बदिलियूं।

$$\frac{3}{4} = \frac{(3 \times 3)}{(4 \times 3)} = \frac{9}{12}$$

हा! इहो करे असां छिनि अणपूरनि खे सवलाईअ
सां घटाए सधूं था।

वीचारु करियो! असां अंस ऐं छेद छिन्ही खे 3 सां ज़र्ब
करणु लाइ छो चूडियो?

$$\frac{2}{3} = \frac{(2 \times 4)}{(3 \times 4)} = \frac{8}{12}$$

वरी! असां अंस ऐं छेद छिन्ही खे 4 सां ज़र्बु करण लाइ छो
चूडियो?

$$\text{इनकरे, } \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{9}{12} - \frac{8}{12} = \frac{1}{12}$$

ब्रह्मगुप्त रीतीअ सां छिनि अणपूरनि खे घटाइणु —

1. छिनल अणपूरनि खे सागिये अणपूर एके वारी तुल अणपूर में मटियो मतिलबु, सागिये छेद में।
2. सागिये अणपूर एके वारे अणपूरनि खे घटायो। इहो छेद खे सागियो रखी करे ऐं अंसखे घटाए करे हासिलु करे सघिजे थो।
3. मिलियल नतीजे खे ज़रुरत मूजिबु सभ खां नंढी सूरति में सरल करियो।

☀ अचो, अभ्यासु करियूं

1. ब्रह्मगुप्त रीतीअ जो इस्तेमाल करे हेठि डिनल हलु करियो:

क. $\frac{8}{15} - \frac{3}{15}$

ख. $\frac{2}{5} - \frac{4}{15}$

ग. $\frac{5}{6} - \frac{4}{9}$

घ. $\frac{2}{3} - \frac{1}{2}$

2. इशारे मूजिबु कट करियो:

क. $\frac{13}{4}$ मां $\frac{10}{3}$

ख. $\frac{18}{5}$ मां $\frac{23}{3}$

ग. $\frac{29}{7}$ मां $\frac{45}{7}$

3. हेठि डिनल सुवालनि खे हल करियो:

क. जया जो स्कूल संदसि घर खां $7/10$ किलोमीटर परे आहे। हूअ रोजु स्कूल पहुचण लाइ $1/2$ किलोमीटर ऑटो सां वेंदी आहे ऐं बाकी फ़ासिलो पंधु हली पूरो कंदी आहे। हूअ स्कूल पहुचण लाइ हरि रोजु केतिरो पंधु हलंदी आहे।?

ख. जीविका खे पार्क जो हिकु पूरो फेरो पाइण में $10/3$ मिनिट लगंदा अथसि ऐं हुनजी साहेड़ी नमिता उहो ई कमु करण में $13/4$ मिनिटनि जो वक्रतु वठंदी आहे। बिन्ही मां केरि घटि वक्रिते में पूरो चकरु लगाईदी आहे ऐं केतिरो घटि वक्रिते वठंदी आहे।?

7.9 हिक चपुटी तारीख़

छा तव्हां खे ज़ाण आहे त क़दीम भारत में अणपूर खे चा चयो वेंदो हो? संस्कृत में बि हिनखे अणपूर चयो वेंदो आहे, जंहीं जी माना आहे टुटलु। हिनखे भाडो या अंसु मतिलबु हिसो या खंडु (जुजो) बि चयो वेंदो आहे।

अजु असीं जंहीं नमूने अणपूर लिखंदा आहियूं, उनजो जनमु भारत में थियो हो। क़दीम भारतीय हिसाबी किताब, बख्शाली दस्तखत (अटिकल 300 ई.) में, जंडहिं हू $1/2$ लिखण चार्हीदा हुआ, त हू हिन खे 1 2 वांगुरु लिखंदा हुआ, जेको हक़ीक़त में, जीअं असां अजु लिखूं था, उनसां चडो सरीखो आहे। अणपूरनि में लिखणु ऐं कमु करण जी हीअ रीति भारत में ईदड़ घणनि ई सदियुनि ताई इस्तेमालु थींदी रही, जंहीं में आर्यभट्ट (499 ई.), ब्रह्मगुप्त (628 ई.), श्रीधराचार्य (अटिकल 750 ई) ऐं महावीराचार्य (850 ई.) सां

गडु बिया माणहू बि शामिल आहिनि । '1/2' ऐं बियनि अणपूरनि में अंस ऐं छेद जे विच जे लीक-टुकुर खे पोइ मोरक्को जे गुणपज्ञानी अल-हसर (12 हीं सदीअ में) कतबि आंदो । अगिते कुझ सदियुनि ताई हीउ इशाराती तरीको यूरोप ऐं पूरे संसार में फहिलिजी वियो ।

अणपूर जो इस्तेमाल कदीम मिस्र ऐं बेबीलोनिया सभ्यता जहिड़ियुनि बियुनि तहज़ीबुनि में बि कयो वियो, पर हू मुख्य रुप सां अणपूर एकनि जो ही इस्तेमाल कंदा हुआ, मतिलबु अंस 1 वारा अणपूर । घणो करे अणपूर खे अणपूर एकनि जे जोड़ जे रुप में ज़ाहिर कयो वेंदो हुआ, जंहिं खे हाणे 'गडियल अणपूर' चयो वेंदो आहे । अंगनि खे अणपूर एकनि जे जोड़ वांगुरु लिखणु, मिसाल तौर, $19/24 = 1/2 + 1/6 + 1/8$ हिकु फ़नु थी सघे थो ऐं इहो सुहिणी पिरोलियुनि डांहुं वठी थो वजे । असां अगिते अहिड़ी ई हिक पिरोलीअ ते वीचारु कंदासी ।

आम अणपूर (जिते ज़रूरी नाहे त अंसु 1 हुजे) खे सभिनी खां पहिरीं भारत में अंगी हिसाब जे अमलु करणु, जीअं--- जोड़, कट, ज़र्ब ऐं ऐतिरे कदुर जो अणपूर जे वंड जे नेमनि बाबति बि बुधायो वियो हो । शुल्व-सुल नाले कदीम भारतीय ग्रंथ सां ज्ञाण पवे थी त वैदिक समे में ई भारतीयुनि अणपूरनि खे अमल करण जे नेमनि जी खोजिना करे छडे हुई । अणपूरनि खे कतबि आणण जी ऐं उन्हनि जी गुणप करण जे आम नेमनि ऐं कारवाइयुनि खे पहिरियों दफ़ो दस्तूरी नमूने ऐं ज़दीदी तौर ते ब्रह्मगुप्त द्वारां क्राइदनि में बधियो वियो ।

ब्रह्मगुप्त जी रीति ई आहे जंहिं जो इस्तेमाल अजु असां अणपूरनि खे हलु करण लाइ ऐं उन्हनि जी गुणप करण में कंदा आहियूं । मिसाल तौर, ब्रह्मगुप्त हेठि डिनल तरीकनि सां अणपूर खे जोड़ण ऐं कटणु जो तरीको बुधायो –

“हरहिक अणपूर जे अंस ऐं छेद खे बियनि छेदनि सां ज़र्ब करण ते अणपूर हिक गडियल (उभयनिष्ठ) छेद में मटिजी वेंदो आहे । पोइ जोड़ जे मामले में, अंस (मथां सरल तरीके सां हासिलु थियलु) खे जोड़ियो वेंदो आहे । कट करण जे मामले में उन्हनि जे तफ़ावत खे खंयो वेंदो आहे ।“ (ब्रह्मगुप्त: ब्रह्मस्फुट सिद्धांत, श्लोक 12.2, 628 ई.)

अणपूर सां गंडियल भारतीय मजिताऊं ऐं रीतियूं ईदड़ कुझ सदियुनि में अरबनि पारां यूरोप में पहुतियूं ऐं 17हीं सदीअ ताई यूरोप में उनजो आम इस्तेमालु थियण लगो ऐं वरी दुनिया भर में फहिलजी वेई ।

पिरोली !

जेकडहिं केरु सागियनि अणपूर एकनि जो इस्तेमाल करे थो, त जोडु-उपति 1 हासिलु करण लाइ अणपूर एकनि खे जोडण सवलो आहे। मिसालु तौर,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1, \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1, \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1, \text{ वगैरह।}$$

छा तव्हां सभिनी जुदा-जुदा अणपूर एकनि खे जोडे 1 हासिलु करण जो को तरीको सोचे सघो था?

बिनि जुदा-जुदा अणपूर एकनि खे जोडे 1 हासिलु करण मुमकिनु कोन आहे। इनजो सबबु इहो आहे त $1/2$ सभिनी खां वडो अणपूर एको आहे, ऐं $1/2 + 1/2 = 1$

जुदा-जुदा अणपूर एका हासिलु करण लाइ असांखे घटि में घटि हिक $1/2$ खे कंहिं नंढे अणपूर एके सां मटिणो पवंदो, पर तडुहिं जोड-उपति 1 खां घटि थींदी ! इनकरे ब जुदा-जुदा अणपूर एकनि जो जोडु 1 हासिलु करण मुमकिनु कोन आहे।

तडुहिं बि असां 1 खे ट्रिनि जुदा-जुदा अणपूर एकनि जे जोड वांगुरु लिखण जो तरीको गोल्हण जी कोशिश करे सघूं था।

1. छा तव्हां ट्रे जुदा-जुदा अणपूर एका गोल्हे सघो था, जंहिं जो जोडु 1 हुजे?

हिते मसइले जो फ़क़तु हिकु ई हलु आहे। (3 अणपूर अददनि जो सिलसिलो बदिलण ताई) ! छा तव्हीं हिनखे गोल्हे कढी सघो था ? अगियां वधण खां अगु पहिरीं हिनखे गोल्हण जी कोशिश करियो।

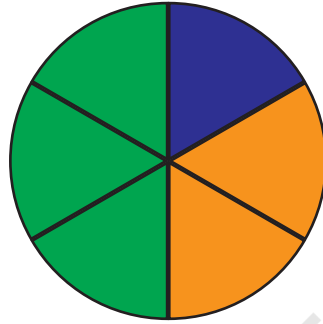
इहा कोशिश करियो

हिते हलु हासिल करण जो सिलसिलेवार तरीको डिनो वियो आहे। असां खे ज्ञाण आहे त $1/3 + 1/3 + 1/3 = 1$ थींदो आहे। जुदा-जुदा अणपूर एका हासिलु करण लाइ असांखे घटि में घटि हिक $1/3$ खे वधाइणो पवंदो, ऐं बिये $1/3$ खे उन वाध जी भरपाई करण लाइ घटाइणो पवंदो। $1/3$ खे बिये अणपूर एके ताई वधाइण जो रुगो हिकु ई तरीको आहे, हिन खे $1/2$ सां मटिणो पवंदो। इनकरे $1/2$ हिकु अणपूर एको ज़रूर हुजण घुरिजे।

हाणे $1/2 + 1/4 + 1/4 = 1$, हाणे जुदा अणपूर एको हासिलु करण लाइ असांखे हिक $1/4$ खे वधाइणो पवंदो ऐं बिये $1/4$ खे उन वाध जी भरपाई लाइ घटाइणो पवंदो। हाणे $1/4$ खे

1/2 खां जुदा बिये अणपूर एके ताई वधाइण जो रुगो हिकु ई तरीको आहे, हिन खे 1/3 सां मटणु। इनकरे ब अणपूर एका पक ई पक 1/2 ऐं 1/3 हूदा! वरी टियों अणपूर अंगु छा थियणु घुरिजे, जंहीं सां ट्रिन्ही अणपूर एकनि जो जोडु 1 थिए?

इन सां जाहिरु थिए थो त छो मथिए मसइले जो रुगो हिकु ई हलु आहे। छा थींदो जेकडहिं असां चारि जुदा-जुदा अणपूर।



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$$

छा थींदो जेकडहिं असां चारि जुदा-जुदा अणपूर एका गोल्हियूं, जंहीं जी जोड़-उपति 1 हुजे1 ?

2. छा तव्हां चारि जुदा-जुदा अणपूर एका गोल्हे सघो था, जंहीं जो जोडु 1 हुजे?

नतेजनि हिन मसइले जा छह हल आहिनि! छा तव्हां उन्हनि मां घटि में घटि हिकु गोल्हे सघो था?

छा तव्हां सभेई समाधान गोल्हे सघो था? तव्हां बिनि ऐं ट्रिनि अणपूर एकनि जी सूरति खे सागी दलील जो इस्तेमाल करे कोशिश करे सघो था या पंहिंजी ई का रीति बि गोल्हे सघो था। जीअं ई तव्हां हिकु हलु गोल्हे लहो था, उनजी साख्यात तस्वीर लाइ तडहिं हिक गोल खे भाडनि में विरिहाइण जी कोशिश करियो, जीअं त मथे तस्वीर में कयो वियो आहे।

इहा कोशिश
करियो

सारांश

- सागिये भाडे वांगुरु अणपूर--- जडहिं हिक सालिम अंग वारे एके खे बराबर भाडनि में विरिहायो ऐं वंढियो वेंदो आहे, त हिकु अणपूर मिलंदो आहे।
- अणपूर एका--- जडहिं हिक सालिम मूल एके खे बराबर भाडनि में विरिहायो वेंदो आहे, त हरहिकु भाडे अणपूर एको सडाईदो आहे।
- अणपूर खे पढणु--- कंहिं अणपूर जीअं 5/6 में 5 खे अंसु ऐं 6 खे छेद चयो वेंदो आहे। हिन खे 5 भाडो 6 पढियो वेंदो आहे।
- गडियल अणपूर-- में हिकु पूरो अददी भाडो ऐं हिकु अणपूरो भाडो थींदो आहे।
- अददु लीक--- अणपूरनि खे अददु लीक ते ज़ीहिरु करे सघिजे थो। हरहिक अणपूर लाइ अददु लीक ते इनसां लागापियलु हिकु टुबिको हूंदो आहे।
- तुलु अणपूर--- जडहिं ब या वधीक अणपूर बराबर भाडो ज़ाहिरु कनि, त उन्हनि खे तुलु अणपूर चयो वेंदो आहे।
- नंढे मां नंढो या सभ खां नंढी सूरति--- अणपूर, जंहिं जे अंस ऐं छेद में 1 खां सिवाय को बियो गडियल ज़र्बीदइप न हुजे, त उहो अणपूर नंढे मां नंढी सूरति में या सभ खां सादी सूरति सडाईदी आहे।
- अणपूर जे जोड़ लाइ ब्रह्मगुप्त रीति--- अणपूर खे जोड़ींदे वक्रिते उन्हनि खे सागिये अणपूर एके वारे तुल अणपूर में मटियो (मतलब सागिये छेद वारी), ऐं तडहिं जोड़ु हासिलु करण लाइ हरहिक अणपूर में अणपूर एकनि जी गुणप जोड़ियो। इहो छेद खे सागियो रखंदे अंसु खे जोड़े करे हासिल कयो वेंदो आहे।
- अणपूर जे घटाइण जी ब्रह्मगुप्त विधि--- अणपूर खे घटाईंदे वक्रिते उन्हनि खे सागिये अणपूर एके वारे तुल अणपूर में मटियो (मतिलबु सागिये छेद वारी), ऐं तडहिं कटण लाइ हरहिक अणपूर में अणपूर एकनि जो अददु घटायो। इहो छेद खे सागियो रखंदे अंस खे घटाए करे हासिल कयो वेंदो आहे।