

शून्याची दुसरी बाजू



0674CH10

► पूर्णांक

चडांत चड आंकडो!!

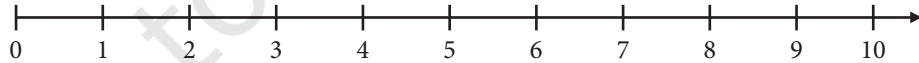
याद करत की गणिताच्या अभ्यासांत आमकां पयलीं जे आंकडे कळ्ळे ते म्हळ्यार गिन्यान क्रमांक 1, 2, 3, 4, ... तेन्ना आमकां कळ्ळें की आनीकूय आंकडो आसा! देखीक, 0 (शून्य) हो आंकडो आसता, जो कांयच दाखयना, जो पयलीं येता

1. 0 ह्या आंकड्याक भारतांत आनी आतां संवसारांत खूब म्हत्वाचो इतिहास आसा. देखीक, संवसारभर आमी 0 ते 9 अंक वापरून भारतीय संख्या पद्धतींत संख्या बरोवपाक शिकतात, जाका लागून आमकां फकत हे 10 अंक वापरून कितलेय व्हड वा कितलेय ल्हान आंकडे बरोवपाक मेळटात.

तेन्ना आमी अदीक आंकड्या विशीं शिकले जे मदीं अस्तित्वांत आसात आंकडो 0, 1, 2, 3, 4, ..., जशें $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, आनी $\frac{13}{6}$. हांकां अपूर्णांक म्हणटात.

पूण अजून आंकडो चड आसा ? बरें, 0 हो एक अतिरिक्त आंकडो जाचे विशीं आमकां पयलीं खबर नाशिल्ली, आनी 1 पयलीं येता आनी 1 परस उणी आसा. 0 पयलीं येवपी आनी 0 परस उणे आशिल्ले चड आंकडे आसूं येतात?

दुसरे तरेन वाक्प्रचार करून आमी संख्या ओळ पळयल्या:



पूण हें खरें म्हळ्यार फकत एक आंकडो 'रे', भुमितींत आमी पयलीं शिकिल्ल्या भाशेंत; हो रे 0 सावन सुरू जावन सदांच उजवे वटेन वता. हो आंकडो रे खऱ्या संख्या रेशेमेरेन पुराय जावचो म्हूण 0 चे दावे वटेन आंकडे अस्तित्वांत आसात काय?

हाची चवकशी आमी ह्या अध्यायांत करतले!

☀ 0 परस उणो आंकडो आसूं येता? खंयच्याय गजालीचो 0 परस उणो आसपाचो खंयचोय मार्ग विचार करूं येता?

10.1 बेलाची मजेची इमारत

बेलाच्या आयस्क्रीम कारखान्यांत भुरगीं ताचें चवदार आइस्क्रीम पळोवपाक आनी खावपाक गर्दी करतात. तांकां आनीकूय मजा येवची म्हूण बेलान एक भोवमजली इमारत विकत घेतली आनी तातूंत आकर्शणां भरलीं. ताणें ताका बेलाची मजेची इमारत अशें नांव दिलें.

पूण ही सामान्य इमारत नाशिल्ली!

निरिक्षण करात की कांय माळ्यांतल्या

‘बेलाची मजेची इमारत’ जमनीसकयल आसात. खंयचीं दुकानां आसात जी तुमी ह्या माळ्यांचेर सोदून काडटात? तळाच्या माळ्यार कितें आसा ?

माळ्यां मदीं वयर सकयल वचपाखातीर लिफ्टाचो उपेग जाता. तातूंत दोन बटणां आसात: ‘+’ वयर वचप आनी ‘-’ सकयल वचपी. लिफ्ट पळोवंक मेळटा?

‘वेलकम हॉल’ सावन आर्ट सेंटरांत वचपाक ‘+’ बटण दोन फावटीं दाबोवपाक जाय.

बटण दाबोवप ++ वा + 2 अशें आमी म्हणटात..

दोन माळो सकयल वचपा खातीर तुमी ‘-’ बटण दोन फावटीं दाबोवपाक जाय, जें आमी -- वा - 2 अशें बरयतात.

म्हणटकच +1 दाबल्यार (म्हळ्यार एकदां ‘+’ बटण दाबयल्यार) जाल्यार एक माळो वयर वता आनी जर तुमी -1 दाबयतात (म्हळ्यार एकदां ‘-’ बटण दाबयल्यार), जाल्यार तुमी 1 माळ्यार सकयल वतात. एकदां), मागीर तुमी 1 माळो सकयल वतात

लिफ्ट बटण दाबोवप आनी आंकडो:

+++ अशें बरयलां + 3

--- अशें बरयल्लें आसा - 4

☀ चार माळो वयर वचपाक कितें दाबतले? तीन माळे सकयल वचपाक कितें दाबतले?

मजेच्या इमारतींतल्या माळ्यांचो आंकडो

‘बिल्डिंग ऑफ फन’ हातूंत प्रवेश तळाच्या माळ्याच्या पांवड्यार आसून ताका ‘वेलकम हॉल’ अशें म्हणटात. तळाच्या माळ्या सावन सुरवात करून + 1 दाबून फूड कोर्टांत पावपाक शकता आनी + 2 दाबून आर्ट सेंटरा मेरेन पावपाक शकता

म्हणटकच फूड कोर्ट फ्लोर + 1 चेर आसा आनी आर्ट सेंटर फ्लोर + 2 चेर आसा अशें आमी म्हणूं येता.

सकयल्या माळ्या सावन सुरवात करून, टॉय स्टोरांत पावपा खातीर तुमी – 1 दाबोवंक जाय. देखून, टॉय स्टोर फ्लोराचेर आसा – 1 तशेंच तळाच्या माळ्या सावन सुरू जावन, व्हिडियो गेम्साच्या दुकानांत पावपा खातीर तुमी – 2 दाबोवपाक जाय. म्हणटकच व्हिडियो गेम्साचें दुकान फ्लोर – 2 चेर आसा.

सकयल्या माळ्याक माळो 0 अशें म्हणटात. कित्याक तें पळोवंक शकता?

☀ मजेच्या इमारतींतल्या सगळ्या माळ्यांचो आंकडो.

+ 3 हो बुक स्टोराचो फ्लोर नंबर आसा हें तुमच्या लक्षांत आयलां, पूण तुमी + 3 दाबल्यार तुमी वयतल्या त्या माळ्यांचोय आंकडो? तशेंच – 3 हो माळो क्रमांक पूण तशेंच दाबल्यार तुमी सकयल वचपी माळ्यांचो आंकडो – 3, तुमी दाबल्यार – – – .

मुखार ‘+’ चिन्न आशिल्ल्या आंकड्याक सकारात्मक आंकडो म्हण्टात. मुखार ‘–’ चिन्न आशिल्ल्या आंकड्याक ऋणात्मक आंकडो म्हण्टात..

‘बिल्डिंग ऑफ फन’ हातूंत संदर्भ वा सुरवात बिंदू म्हूण तळाचो माळो, माळो 0 वापरून माळ्यांचो क्रमांक दितात. सकयल्या माळ्या वयल्या माळ्यांचो आंकडो सकारात्मक संख्येन आसता. तळाच्या माळ्या वयल्यान तांचे कडेन वचपा खातीर कांय फावटीं ‘+’ बटण दाबपाक जाय. जमनीसकयल आशिल्ल्या माळ्यांचो आंकडो ऋणात्मक आंकड्यांनी आसता. तळाच्या माळ्या वयल्यान तांचे कडेन वचपा खातीर, कांय फावटीं ‘–’ बटण दाबचें पडटा..

शून्य हो सकारात्मक वा ऋणात्मक आंकडो न्हय.

ताचे मुखार आमी ‘+’ वा ‘–’ चिन्न दवरनात.

हालचालींचेर नदर दवरपा खातीर भर

फूड कोर्टांतल्यान सुरवात करून लिफ्टांत + 2 दाबात. खंय पावतले? _____

हाचें वर्णन आमी अभिव्यक्ती वापरून करूं येता:

सुरवातीक माळो + हालचाल = लक्ष्य माळो.

सुरवातीचो माळो + 1 (फूड कोर्ट) आनी बटण दाबपाचो आंकडो + 2 आसा. ताका लागून तुमी लक्ष्य माळ्यार $(+ 1) + (+ 2) = + 3$ (बुक स्टोर) मेरेन पावतात.

Figure it Out

- तुमी फ्लोर + 2 सावन सुरवात करतात आनी लिफ्टांत - 3 दाबतात. खंय पावतली? हे हालचालीक खातीर अभिव्यक्ती बरोवप.
- ह्या अभिव्यक्तींचें मुल्यांकन करात (मजेच्या इमारतीचो संदर्भ दिवन तुमी तांकां स्टार्टिंग फ्लोर + मूव्हमेंट अशें समजूं येता).

क. $(+ 1) + (+ 4) =$ _____	ख. $(+ 4) + (+ 1) =$ _____
ग. $(+ 4) + (- 3) =$ _____	घ. $(- 1) + (+ 2) =$ _____
ड. $(- 1) + (+ 1) =$ _____	च. $0 + (+ 2) =$ _____
छ. $0 + (- 2) =$ _____	
- वेगवेगळ्या माळ्यांतल्यान सुरवात करून, माळो - 5 मेरेन पावपाक लागपी हालचाली सोदून काडात. देखीक, जर हांव फ्लोर + 2 सावन सुरवात करता जाल्यार माळो - 5 मेरेन पावपाक म्हाका - 7 दाबचो पडटलो. अभिव्यक्ती म्हळ्यार $(+ 2) + (- 7) = - 5$. अशीं आनीक सुरवातीची सुवात आनी फ्लोर - 5 मेरेन पावपाक जाय आशिल्ल्यो हालचाली सोदून काडात आनी अभिव्यक्ती बरयतात.

बटण दाबून एकठांय करप हेंय जोड

गुरमीत टॉय स्टोरांत आशिल्लो आनी ताका दोन माळे सकयल वचपाची इत्सा आशिल्ली. पूण चुकून ताणें '+' बटण दोन फावट दाबलें. ताका आपली चूक कळ्ळी आनी ताणें बेगीन '-' बटण तीन फावट दाबलें. टॉय स्टोराच्या सकयल वा वयर कितले माळे गुरमीत पावतलो?

गुरमीत एक माळो सकयल वता. बटण दाबून एकठांय केल्ल्यान जावपी हालचाल आमी अभिव्यक्ती म्हूण दाखोवंक शकतात: $(+ 2) + (- 3) = - 1$.

☀ हें सोदून काडात

बटण दाबपाची परिणामी हालचाल असो विचार करून ह्या अभिव्यक्तींचें मुल्यांकन करात :

क. $(+1) + (+4) = \underline{\hspace{2cm}}$ ख. $(+4) + (+1) = \underline{\hspace{2cm}}$
 ग. $(+4) + (-3) + (-2) = \underline{\hspace{2cm}}$ घ. $(-1) + (+2) + (-3) = \underline{\hspace{2cm}}$

परतून शुन्याकडेन!!

तळाच्या माळ्यार बसंत खूब घाइट आसा आनी चुकून तो $+3$ दाबलो. तें रद्द करून तळाच्या माळ्यार रावपाक तो कितें करूंक शकता? तो -3 दाबून तो रद्द करूंक शकता. म्हळ्यार $(+3) + (-3) = 0$.

आमी -3 हाका $+3$ चो व्युत्क्रम म्हणटात. तशेंच -3 चो व्युत्क्रम $+3$ आसता.

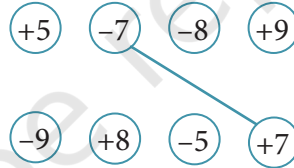
बसंत आतां $+4$ दाबून उपरांत लिफ्टांत -4 दाबतलो जाल्यार तो खंय पावतलो?

तूं फ्लोर $+4$ चेर आसल्यार आनी तुमी ताचो उरफाटें -4 दाबल्यार, तुमी परत शून्याचेर पावल्यात, तळाचो माळो! तुमी फ्लोर -2 हांगा आसल्यार आनी ताचो उरफाटें $+2$ दाबोवन दवरल्यार तुमी $(-2) + (+2) = 0$, परत तळाच्या माळ्यार वतात!!

☀ ह्या आंकड्यांचे उरफाटें बरयात::

$+4, -4, -3, 0, +2, -1$.

☀ ओळी काडून उरफाटें जोडात.



माळो वापरून आंकड्यांची तुळा करप

☀ सगल्यांत सकयल्या माळ्यार कोण आसा?

- जय आर्ट सेंटरांत आसा. म्हणटकच तो फ्लोर $+2$ चेर आसा.
- आसीन खेळां केंद्रांत आसा. म्हणटकच ते फ्लोर $\underline{\hspace{1cm}}$ आसा.
- बिन्नू सिनेमा सेंटरांत आसा. म्हणटकच ते फ्लोर $\underline{\hspace{1cm}}$ आसा.
- अमन टॉयज स्टोरांत आसा. म्हणटकच तो फ्लोर $\underline{\hspace{1cm}}$ आसा.

माळो +3 माळो +4 परस उणो आसता. म्हणटकच आमी $+3 < +4$ बरयतात. . आमी $+4 > +3$ अशेंय बरयतात.

☀ आमी $-3 < -4$ वा $-4 < -3$ बरोवंक जाय?

माळो - 4 माळो - 3 परस सकयल आसा. तर, $-4 < -3$. अशेंय बरप बरोबर $-3 > -4$

☀ हें सोदून काडात

- बिल्डिंग ऑफ फन वापरून सकयल दिल्ल्या क्रमांकांची तुळा करात आनी $<$ वा $>$ सयत बॉक्सांत भरात.

क. $-2 \square + 5$

ख. $-5 \square + 4$

ग. $-5 \square - 3$

घ. $+6 \square - 6$

ड. $0 \square - 4$

च. $0 \square + 4$

सगले निगेटिव्ह नंबर फ्लोर फ्लोर 0 सकयल आसात हें लक्षांत घेयात. ताका लागून सगले ऋणात्मक आंकडे 0 परस उणे आसतात. सगले पॉझिटिव्ह नंबर फ्लोर फ्लोर 0 वयर आसात. ताका लागून सगले पॉझिटिव्ह आंकडे 0 परस चड आसतात.

- आनीक माळो आशिल्ल्या बिल्डिंग ऑफ फनची कल्पना करात. आंकड्यांची तुळा करात आनी $<$ वा $>$ वांगडा बॉक्सांत भरात:

क. $-10 \square - 12$

ख. $+17 \square - 10$

ग. $0 \square - 20$

घ. $+9 \square - 9$

ड. $-25 \square - 7$

च. $+15 \square - 17$

- ओळ म्हूण उजवे वटेन दाखयल्ले इमारतींत माळो $A = -12$, माळो $D = -1$ आनी माळो $E = +1$ आसल्यार B, C, F, G, आनी H ह्या माळ्यांचो आंकडो सोदून काडात.

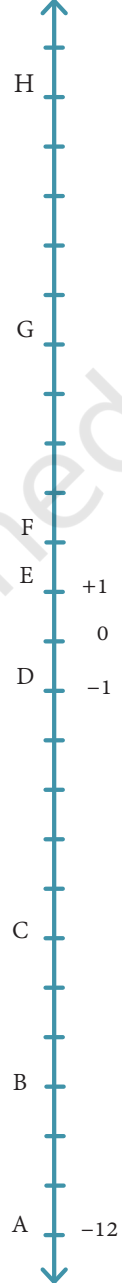
- उजवे वटेन दाखयल्ले इमारतीच्या सकयल दिल्ल्या माळ्यांचेर खुणा करात.

क. -7

ख. -4

ग. $+3$

घ. -10



वजा करपाक खंयचें बटण दाबचें तें सोदून काडात

पयलींच्या वर्गांत आमकां वजाबाकीचो अर्थ 'घेवप' असो समजतालो. देखीक, शेल्फाचेर 10 पुस्तकां आसतात तातूंतली 4 पुस्तकां काडटात. शेल्फाचेर कितले उरल्यात?

हें उतर आमी वजाबाकीचो वापर करून व्यक्त करूं येता: $10 - 4 = 6$ वा 'टेन टेक अवे फोर इज सिक्स.'

तशेंच वजाबाकीचो आनीक एक अर्थ तुमकां खबर आसूं येता जो तुळा करपा कडेन संबंदीत आसा वा राशी समान करपा कडेन संबंदीत आसा. देखीक, हे परिस्थितीचो विचार करात: म्हजे कडेन '10 आनी म्हजे भयणीक '6 आसा..

आतां, हांव प्रस्न विचारूं शकता: म्हजे इतले पयशे मेळोवपा खातीर म्हज्या भयणीक आनीक कितले पयशे मेळपाक जाय?

हें आमी दोन तरांनी बरोवंक शकतात: $6 + ? = 10$ वा $10 - 6 = ?$

हांगा आमकां "हरवल्लो नंबर जोडपाचो सोद" आनी वजाबाकीचो संबंद दिश्टी पडटा.

सकारात्मक आनी ऋणात्मक आंकड्यांच्या वजाबाकीखातीर आमी वजाबाकीचो हो अर्थ 'समान करप' वा 'लुप्त संख्या जोडपाचो सोदप' असो वापरता'.

☀ हे नदरेंतल्यान $15 - 5$, $100 - 10$ आनी $74 - 34$ हांचें मुल्यांकन करचें.

शिक्षकाक टिपणी

सादारणपणान जेन्ना दोन असमान राशी आसतात तेन्ना वजाबाकींतल्यान राशी समान करपाखातीर लागपी बदल दाखोवंक मेळटा. वजाबाकींतल्यान लक्ष्य मात्रा जावपा खातीर सुरवातीच्या प्रमाणांत कितलो बदल जावंक जाय हें दाखयता. वेगवेगळ्या मजल्याच्या पांवड्याच्या संदर्भांत, सुरवातीच्या माळ्या वयल्यान लक्ष्य माळ्यार पावपाक कितें बदल करपाची गरज आसा? गरज आशिल्लो बदल सकारात्मक (वाड करपा खातीर) वा नकारात्मक (उणो जावपा खातीर) आसूं येता हें लक्षांत घेयात.

तुमचो सुरवातीचो माळो कला केंद्र आनी तुमचो लक्ष्य माळो म्हळ्यार खेळां केंद्र. तुमचें दाबाचे बटण कितें आसूंक जाय?

तीन माळे वयर वचपाची गरज आसा, म्हूण $+ 3$ दाबपाक जाय. वजाबाकीचो वापर करून आमी हें अभिव्यक्ती म्हूण बरोवंक शकतात:

लक्ष्य माळो - सुरवात माळो = हालचाल गरजेची.

वयल्या उदाहरणांत सुरवातीचो माळो $+ 2$ (आर्ट सेंटर) आनी लक्ष्य माळो $+ 5$ आसा. $+ 2$ पसून $+ 5$ मेरेन पावपाक बटण दाबपाक $+ 3$ आसा. ताका लागून

$$(+ 5) - (+ 2) = + 3$$

स्पष्टीकरण

बेरीज आनी वजाबाकीचो संबंद याद करात. $3 + ? = 5$ खातीर वजाबाकीचो उपेग करून आमी हरवल्ली संख्या सोदून काडूंक शकतात: $5 - 3 = 2$. म्हळ्यार वजाबाकीची संख्या जोडपा खातीर सोदून काडपा सारकीच आसता.

आमकां खबर आसा की —

$$\text{सुरवात करपी माळो} + \text{हालचाल गरजेची} = \text{लक्ष्य माळो}$$

गरज आशिल्ली हालचाल मेळोवपाची आसल्यार

$$\text{सुरवात माळो} + ? = \text{लक्ष्य माळो}$$

तर,

$$\text{लक्ष्य माळो} - \text{सुरवातीचो माळो} = ? = \text{हालचाल गरजेची}$$

आनीक उदाहरणां :

क. लक्ष्य मजलो -1 आनी सुरवातीचो माळो -2 आसल्यार तुमी खंयचें बटण दाबतले?

एक माळो वयर वचपाची गरज आसा, म्हणटकच $+1$ दाबपाक जाय.

$$\text{अभिव्यक्ती: } (-1) - (-2) = (+1)$$

ख. लक्ष्य मजलो -1 आनी सुरवातीचो माळो $+3$ आसल्यार तुमी खंयचें बटण दाबतले?

चार माळो सकयल वचपाची गरज आसा, म्हणटकच तुमी दाबपाक जाय -4 .

$$\text{अभिव्यक्ती: } (-1) - (+3) = (-4)$$

ग. लक्ष्य मजलो $+2$ आसल्यार आनी सुरवातीचो माळो म्हळ्यार -2 , तुमी बटण दाबपाक जाय?

चार माळे वयर वचपाची गरज आसा, म्हणटकच $+4$ तुमी दाबपाक जाय.

$$\text{अभिव्यक्ती: } (+2) - (-2) = (+4)$$

☀ हें सोदून काडात

ही अभिव्यक्ती पुराय करात. सुरवातीच्या माळ्या वयल्यान लक्ष्य माळ्यार पावपाक जाय आशिल्ली हालचाल सोदून काडप अशें तुमी तांकां समजूं येता.

क. $(+1) - (+4) = \underline{\hspace{2cm}}$

ग. $(+4) - (+1) = \underline{\hspace{2cm}}$

ड. $(+4) - (-3) = \underline{\hspace{2cm}}$

छ. $(-1) - (+2) = \underline{\hspace{2cm}}$

झ. $(-1) - (+1) = \underline{\hspace{2cm}}$

ख. $(0) - (+2) = \underline{\hspace{2cm}}$

घ. $(0) - (-2) = \underline{\hspace{2cm}}$

च. $(-4) - (-3) = \underline{\hspace{2cm}}$

ज. $(-2) - (-2) = \underline{\hspace{2cm}}$

झ. $(+3) - (-3) = \underline{\hspace{2cm}}$

व्हड आंकडो जोडप आनी वजा करप

कांय पांवडे चित्रांत खुणायल्यात. जमनीची पातळी 0 अशी खुणायल्या. जमनीवयल्या पांवड्यार सकारात्मक आंकडो आनी जमनीसकयल आशिल्ल्या पातळ्यांचेर ऋणात्मक आंकडो दाखयतात. हो आंकडो जमनीच्या थरासावन कितलो उंचायेचेर वा सकयल आसा तें दाखयता.

हो आंकडो जमनीच्या थरासावन कितलो उंचायेचेर वा सकयल आसा तें दाखयता.

लक्षात घेयात की बिल्डींग ऑफ फन सारकीच

सुरवातीची पातळी + हालचाल = लक्ष्य पांवडो

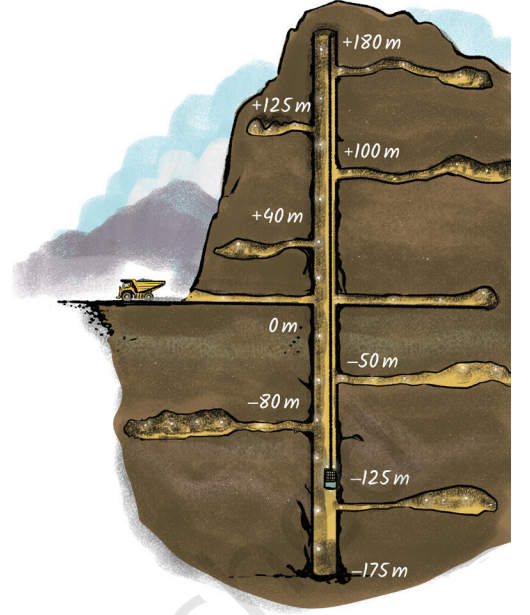
देखीक $(+40) + (+60) = +100$

$(-90) + (-55) = -145$

लक्ष्य पांवडो - सुरवातीची पातळी = हालचाल गरजेची

देखीक $-(+40) - (-50) = +90$

$(-90) - (+40) = -130$



कितले निगेटिव्ह नंबर आसात?

बेलाच्या बिल्डींग ऑफ फन हातूंत वयर फकत स माळे आनी सकयल पांच माळे आशिल्ले. ते म्हळ्यार आंकडो - 5 ते + 6. वयल्या खणींत आमचे कडेन - 200 ते + 180 मेरेनचे आंकडे आसात. पूण व्हडल्यो इमारती वा मायनशाफ्ट आमी कल्पना करूंक शकतात. जशे धनात्मक आंकडे + 1, + 2, + 3, ... शेवट नासतना वयर सरत रावप, तशेंच ऋणात्मक आंकडो - 1, - 2, - 3, ... सकयल वचत रावप. शून्य आशिल्ल्या धनात्मक आनी ऋणात्मक संख्यांक पूर्णांक म्हण्टात. ते 0 पसून दोनूय वाटेन वतात: ... - 4, - 3, - 2, - 1, 0, 1, 2, 3, 4, ...

सोदून काढप

हीं अभिव्यक्ती पुराय करात.

क. $(+40) + \underline{\hspace{2cm}} = +200$

ख. $(+40) + \underline{\hspace{2cm}} = -200$

ग. $(-50) + \underline{\hspace{2cm}} = +200$

घ. $(-50) + \underline{\hspace{2cm}} = -200$

ड. $(-200) - (-40) = \underline{\hspace{2cm}}$

च. $(+200) - (+40) = \underline{\hspace{2cm}}$

छ. $(-200) - (+40) = \underline{\hspace{2cm}}$

मायनशाफ्टांतल्या हालचालींचो विचार करून तुमचीं उतरां तपासून पळयात.

जोडप, वजा करप आनी खंयच्याय आंकड्याची तुळा करप

आनीकूय व्हड पूर्णांक जोडपाक आनी वजा करपा खातीर, आमी आनीकूय व्हड लिफ्टांची कल्पना करूंक शकतात ! खरें म्हणल्यार लेव्हल 0 सावन सुरू जावन सदांच वयर आनी सदांच सकयल पातळपाक शकता अशी लिफ्ट आमी कल्पना करूंक शकतात. सरभोंवतणी खंयचीय इमारत वा म्हजेंय आसपाची गरज ना- फकत 'इन्फिनिट लिफ्ट' !

आमकां आवडटा ते पूर्णांक जोडपाक आनी वजा करपाक आमी हे कल्पनेचो उपेग करूंक शकतात.

देखीक, समजा आमकां वजाबाकीचें $+2000 - (-200)$ करपाचें आसा. जमनीपसून 2000 पातळी आनी जमनी सकयल 200 पातळी आशिल्ल्या लिफ्टाची आमी कल्पना करूंक शकतात. याद करात की,

$$\text{लक्ष्य पांवडो} - \text{सुरवातीची पातळी} = \text{हालचाल गरजेची}$$

सुरवातीच्या माळ्या वयल्यान -200 ते टार्गेट फ्लोर $+2000$ मेरेन वचपा खातीर आमी $+2200$ ($+200$ शून्याचेर पावपाक आनी उपरांत $+2000$ अदीक $+2200$ मेरेन पावपाक जाय). ताका लागून $(+2000) - (-200) = +2200$.

देखीक $(+2000) + (+200)$ हेंय $+2200$

अशेच तरेन योग्य लिफ्ट काडून वा कल्पना करून सकयल दिल्ल्या अभिव्यक्तींचें मुल्यांकन करपाचो यत्न करात:

क. $-125 + (-30)$

ख. $+105 - (-55)$

ग. $+105 + (+55)$

घ. $+80 - (-150)$

ड. $+80 + (+150)$

च. $-99 - (-200)$

छ. $-99 + (+200)$

ज. $+1500 - (-1500)$

वयल्या उदाहरणांत आमी पळयलां की $+2000 - (-200) = +2000 + (+200) = +2200$ दुसऱ्या उतरांनी सांगचें जाल्यार नॅगेटिव्ह संख्या वजा करप म्हळ्यार संबंदीत पॉझिटिव्ह संख्या जोडपा सारकें. म्हळ्यार पॉझिटिव्ह संख्या जोडून आमी नॅगेटिव्ह संख्येच्या वजाबाकीची सुवात घेवंक शकतात !

☀ तुमी वयर केल्ल्या हेर कृतींत, नॅगेटिव्ह संख्या वजा करप म्हळ्यार संबंदीत पॉझिटिव्ह संख्या जोडपा सारकेंच आसा हें तुमच्या लक्षांत आयलां काय? वयर दिल्ल्या 'इन्फिनिट लिफ्ट' कडेन पळयात. ताका लागून तुमकां नंबर लायनीची याद जाता? खंयच्या मार्गान ?

गणिताची
गजाल

परत नंबर लायनीचेर

वयर आमकां दिसपी 'इन्फिनिट लिफ्ट' खूब प्रमाणांत नंबर लायनी सारकी दिसताली, न्हय? खरें म्हणल्यार आमी ताका 90° घुंवडावन दवरल्यार ती मुळांत संख्या रेशा जाता. तशेंच अध्यायाचे सुरवेक आमी विचारिल्ल्या प्रस्नाची जाप दितना संख्या रे संख्या रेशेंत कशें पुराय करचें तें सांगता. 0 चे दावे वटेन नॅगेटिव्ह आंकडे आसात $-1, -2, -3, \dots$

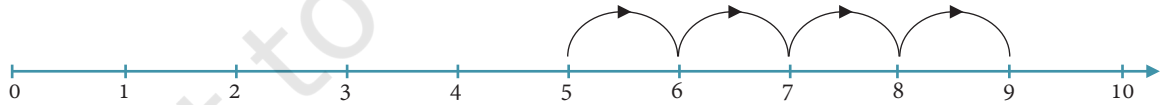
सादारणपणान आमी '+' चिन्ह पॉझिटिव्ह आंकड्यांचेर सोडटात आनी फकत तांकां $1, 2, 3, \dots$



लिफ्ट वापरून नंबर लायनीचेर प्रवास करचे परस ताचेर चलपाची आमी फकत कल्पना करूंक शकतात. उजवे वटेन पॉझिटिव्ह (फुडें) दिशा आनी दावे वटेन नॅगेटिव्ह (फाटल्यान) दिशा आसता

लिफ्ट वापरून नंबर लायनीचेर प्रवास करचे परस ताचेर चलपाची आमी फकत कल्पना करूंक शकतात. उजवे वटेन पॉझिटिव्ह (फुडें) दिशा आनी दावे वटेन नॅगेटिव्ह (फाटल्यान) दिशा आसता . जाल्यार, $2 < 5$; $-3 < 2$; आनी $-5 < -3$.

☀ 5 सावन 9 मेरेन वचपाची इत्सा आसल्यार, नंबर लायनीचेर कितलो प्रवास करचो पडटलो?



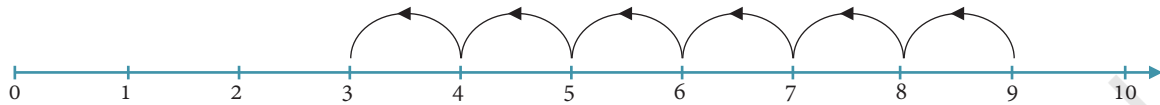
4 पावलां भोंवपाक जाय. तेखातीर $5 + 4 = 9..$

(याद दवरात: सुरवातीची संख्या + हालचाल = लक्ष्य संख्या)

संबंदीत वजाबाकीचें विधान $9 - 5 = 4$ अशें आसा.

(याद दवरात: लक्ष्य क्रमांक - सुरवात संख्या = हालचाल गरजेची)

☀ आतां 9 सावन 3 कडेन वचपाचें आसल्यार नंबर लायनीचेर कितलो प्रवास करचो?



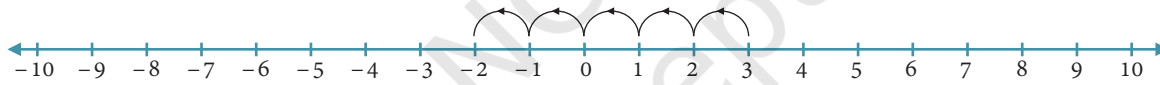
तुमी 6 पावलां फाटीं सरपाक जाय, म्हळ्यार तुमी हालपाक जाय -6 . ताका लागून आमी $9 + (-6) = 3$ अशें बरयतात.

(परत याद करात : सुरवातीची संख्या + हालचाल = लक्ष्य संख्या)

संबंदीत वजाबाकीचें विधान $3 - 9 = -6$ अशें आसा.

(परत याद दवरात: लक्ष्य क्रमांक - सुरवात संख्या = हालचाल गरजेची)

☀ आतां 3 सावन -2 मेरेन वचपाची इत्सा आसल्यार कितलो पयस प्रवास करचो?



प्रवास करपाक जाय -5 पावलां, म्हळ्यार 5 पावलां फाटीं. अशे तरेन $3 + (-5) = -2$. संबंदीत वजाबाकीचें विधान अशें: $-2 - 3 = -5$.

☀ सोदून



1. वयर दिल्ल्या संख्या ओळीचेर 3 पॉझिटिव्ह संख्या आनी 3 नॅगेटिव्ह आंकडो मार्क करात.

2. वयर दिल्ले 3 चिन्न केल्ले नॅगेटिव्ह आंकडे सकयल दिल्ल्या बाँक्सांत बरयात:

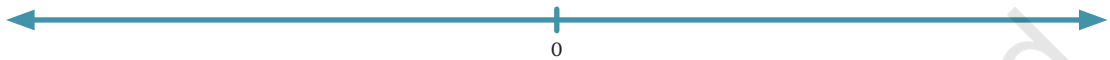
3. $2 > -3$ आसा? कित्याक? $-2 < 3$ आसा? कित्याक?

4. कितें म्हळ्यार अ. $-5 + 0$ ब. $7 + (-7)$ क. $-10 + 20$ ड. $10 - 20$ इ. $7 - (-7)$

फ. $-8 - (-10)$?

जोडपाक आनी वजा करपाक चिन्न नाशिल्ली संख्या ओळ वापरप

जशी तुमी वयर दिल्ल्या संख्या रेशेचो वापर करून ल्हान आंकड्यां वांगडा जोड, वजाबाकी, तुळा करूंक शकतात, तशेंच 'इन्फिनिट संख्या रेशा' कल्पना करून वा 'अनमार्क केल्ली संख्या रेशा' सकयल दिल्ल्या प्रमाण काडून व्हड संख्येन तीं करूंक शकतात:



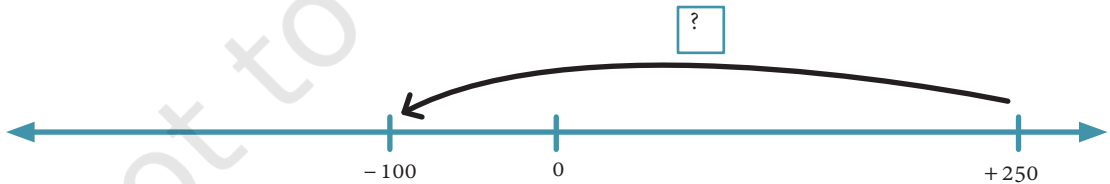
ही ओळ फकत शून्याची स्थिती दाखयता. हेर आंकडो खुणायनात. पूर्णांक जोडपाक आनी वजा करपाक ही चिन्न नाशिल्ली संख्या ओळ वापरप सोयीचें थारूं येता. तुमी संख्या रेशेचें प्रमाण आनी ताचेर आशिल्ल्या संख्यांचीं सुवात दाखोवंक शकतात वा फकत कल्पना करूंक शकतात.

देखीक, ही अनमार्क केल्ली संख्या ओळ (UNL) बेरीज गणित दाखयता: $85 + (-60) = ?$



तेन्ना आमी $85 + (-60) = 25$ अशी कल्पना करूंक शकतात

सकयल दिल्ल्या यूएनएलांत वजाबाकीचे गणित दाखयल्या जाका शेणिल्ली बेरीज गणित अशेंय बरूं येता : $(-100) - (+250) = ?$ or $250 + ? = -100$.



तेन्ना आमी ताची कल्पना करूंक शकतात $? =$ ह्या गणितांत -350 .

अशे तरेन, तुमी पाजिटिव आनी नॅगेटिव्ह आंकड्या वांगडा, कागदाचेर वा तुमच्या तकलेंत चिन्न नाशिल्ली संख्या ओळ वापरून जोड आनी वजाबाकीची गणिता करपाक शकतात.

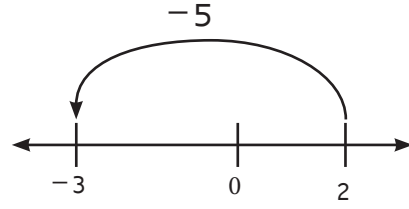
☀ ह्या अभिव्यक्तींचें मुल्यांकन करपाक चिन्न नाशिल्ल्यो संख्या ओळी वापरातः

क. $-125 + (-30) = \underline{\hspace{2cm}}$

ख. $+105 - (-55) = \underline{\hspace{2cm}}$

ग. $+80 - (-150) = \underline{\hspace{2cm}}$

घ. $-99 - (-200) = \underline{\hspace{2cm}}$



वजाबाकीचें अदीक आनी अदीकाचें वजाबाकींत रुपांतर करप

याद करात की लक्ष्य माळो - सुरवातीचो माळो = हालचाल गरजेची

वा

लक्ष्य माळो = सुरवात माळो + हालचाल गरजेची

जर आमी 2 वयल्यान सुरवात केली आनी - 3 कडेन वचपाची इत्सा उक्तायली जाल्यार खंयची हालचाल जाय?

पयली पद्दत: संख्या रेशा पळयल्यार आमकां दिसता की आमकां हालचाल - 5 करपाची गरज आसा (म्हळ्यार फाटले दिकेन 5). ताका लागून $-3 - 2 = -5$. गरज आशिल्ली हालचाल म्हळ्यार -5.

दुसरी पद्दत: 2 ते -3 मेरेनचो प्रवास दोन भागांनी मोडप.

क. 2 ते 0 मेरेन हालचाल $0 - 2 = -2$ अशी आसता.

ख. 0 ते -3 मेरेन हालचाल म्हळ्यार $-3 - 0 = -3$.

एकूण हालचाल म्हळ्यार दोन हालचालींची बेरीज : $-3 + (-2) = -5$.

देखीक दोन रंगीत भाव. दुसऱ्यांत वजाबाकीचें कांयच ना !

अशे तरेन वजाबाकीचें रुपांतर आमी सदांच अदीकांत करूंक शकतात. जो आंकडो वजा जातलो ताचे सुवातेर ताचो प्रतिलोम घेवंक मेळटा आनी मागीर ताचे बदला जोडूं येता.

तशेंच जो आंकडो जोडटात ताचे सुवातेर ताचो प्रतिलोम घेवन उपरांत वजा करूं येता. अशे तरेन आमी सदांच जोडणीचें वजाबाकींत रुपांतर करूंक शकतात.

देखीक:

क. $(+7) - (+5) = (+7) + (-5)$

ख. $(-3) - (+8) = (-3) + (-8)$

ग. $(+8) - (-2) = (+8) + (+2)$

घ. $(+6) - (-9) = (+6) + (+9)$

10.2 टोकन मॉडेल

अदीका खातीर टोकन वापरप

बेलाच्या बिल्डींग ऑफ फनांत लिफ्ट अटेंडंट बोर जाता. स्वताचें मनोरंजन करपा खातीर तो खूब पॉझिटिव्ह (तांबडो) आनी नॅगेटिव्ह (काळो) टोकन आशिल्लो बॉक्स दवरता. दर खेपे तो '+' बटण दाबता तेन्ना तो पेटयेंतल्यान एक पॉझिटिव्ह टोकन काडून आपल्या खिशांत घालता. तशेंच दर खेपे '-' बटण दाबोवन तो नॅगेटिव्ह टोकन घेवन आपल्या खिशांत घालता.

तो सकयल्या माळ्यार (माळो 0) रिकाम्या खिशान सुरवात करता. एका वरा उपरांत तो आपलो खिसो तपासता आनी ताका 5 पॉझिटिव्ह आनी 3 नॅगेटिव्ह टोकन मेळटात. आतां तो खंयच्या माळ्यार आसा?

ताणें '+' 5 फावट आनी '-' 3 फावटीं आनी $(+5) + (-3) = +2$ दाबून दवरलां आसूंक जाय म्हणटकच तो आतां फ्लोर + 2 हांगा आसा.

हिशोब करपाची आनीक एक पद्दत अशी.



एक पॉझिटिव्ह टोकन आनी नॅगेटिव्ह टोकन एकामेकांक रद्द करतात, कारण ह्या टोकनांच्या जोडयेचें एकठांय मोल शुन्य आसता. ताच्या खिशांत आशिल्ले हे दोन टोकन म्हळ्यार ताणें अनुक्रमान '+' 1 फावट आनी '-' एकदां दाबलें आनी हे एकामेकांक रद्द करतात. आमी म्हणटात की पॉझिटिव्ह आनी नॅगेटिव्ह टोकनाक लागून शून्य जोडी जाता. सगळ्यो शून्य जोडयो काडटात तेन्ना तुमचे कडेन दोन पॉझिटिव्ह टोकन उरतात, देखून $(+5) + (-3) = +2$.

टोकन वापरून अशी खंयचीय जोड आमी करूंक शकतात!

देखीक: + 5 आनी - 8 जोडप.



चित्रांतल्यान आमकां दिसता की आमी पांच शून्य जोडयो काडूंक शकतात आनी मागीर आमकां -3 उरतात.
ताका लागून $(+5) + (-8) = -3$

सादून काडप

1. टोकन वापरून अदीक पुराय करात.

क. $(+6) + (+4)$ ख. $(-3) + (-2)$

ग. $(+5) + (-7)$ घ. $(-2) + (+6)$

2. टोकनांच्या सकयल दिल्ल्या दोन संचांतल्यो शून्य जोडयो रद्द करात. दरेक प्रकरणांत लिफ्ट अटेंडंट खंयच्या माळ्यार आसा? दरेक प्रकरणांत संबंदीत अदीक विधान कितें?

क.  ख. 

वजाबाकीखातीर टोकन वापरप

पॉझिटिव्ह टोकन आनी नॅगेटिव्ह टोकन आशिल्ल्या पूर्णांकांची अदीक कशी करची हें आमी पळयलां. टोकन वापरून आमी वजाबाकीय करूंक शकतात!!

देखीक: आमी वजा करूया:

$(+5) - (+4).$

हें करप सोंपें आसा. 5 पॉझिटिव्ह टोकनांतल्यान निकाल पळोवपा खातीर 4 पॉझिटिव्ह घेतात..


 $(+5) - (+4) = +1$

देखीक: आमी वजा करूया:

$(-7) - (-5).$

जशे $(-7) - (-5)$ सारकेंच आसा $(-7) + (+5)$?


 $(-7) - (-5) = -2$

5 पॉझिटिव्ह सकयल दवरचे.: $(+5) - (+6).$

पूण 6 पॉझिटिव्ह काडपाक जाय तितले टोकन नात!!



हो विशय सोदून काडपा खातीर, हाका लागून टोकनांच्या संचाचें मोल बदलना हें जाणून आमी एक अतिरिक्त शून्य जोडी (पॉझिटिव्ह आनी नॅगेटिव्ह) काडूंक शकतात.

आतां आमी 6 पॉझिटिव्ह काडूंक शकतात! देखून कितें उरलां तें :



$$(+5) - (+6) = -1 \text{ असो निश्कर्श आमी काडटात.}$$

सादून काडप

- टोकन वापरून सकयल दिल्ल्या फरकांचें मुल्यांकन करात. आतां तुमकां खबर आशिल्ल्या हेर पद्दतीं प्रमाण तुमकां तसोच परिणाम मेळटा काय ना तें तपासात:

क. $(+10) - (+7)$ ख. $(-8) - (-4)$ ग. $(-9) - (-4)$

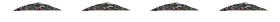
घ. $(+9) - (+12)$ ङ. $(-5) - (-7)$ च. $(-2) - (-6)$

- वजाबाकीं पुराय करात:

क. $(-5) - (-7)$ ख. $(+10) - (+13)$ ग. $(-7) - (-9)$

घ. $(+3) - (+8)$ ङ. $(-2) - (-7)$ च. $(+3) - (+15)$

देखीक: $+4 - (-6)$.



4 पॉझिटिव्ह घेवन सुरवात करची.

हातूंतल्यान आमकां 6 नॅगेटिव्ह काडचे पडटले. पूण तातूंत फावो ते नॅगेटिव्ह नात.

ही अडचण न्हय. हाका लागून टोकनांच्या संचाचें मोल बदलना म्हूण आमी कांय शून्य जोडयो जोडटात.

पूण शून्य जोडयो कितल्यो? आमकां 6 नॅगेटिव्ह काडचे पडटात म्हूण आमी 6 शून्य जोडयो सकयल दवरतात:



आतां आमी 6 नॅगेटिव्ह काडून घेवंक शकतात:



$$\text{ताका लागून } +4 - (-6) = +10$$

☀ सोदून काडप

- वजा करपाचो यत्न करात: $-3 - (+5)$.
कितल्यो शून्य जोडयो घालच्यो पडटल्यो? ताचो परिणाम कितें?
- टोकन वापरून सकयल दिल्ल्या गजालींचें मुल्यांकन करात.
क. $(-3) - (+10)$ ख. $(+8) - (-7)$ ग. $(-5) - (+9)$
घ. $(-9) - (+10)$ ङ. $(+6) - (-4)$ च. $(-2) - (+7)$

10.3 हेर सुवार्तींतले पूर्णांक

क्रेडीट आनी डेबिट

समजा तुमी फाटल्या म्हयन्यांत बचत करताले ते 100 रुपया घेवन तुमी तुमच्या थळाव्या बँकेत बँक खातें उगडलां. देखून तुमची बँक शिल्लक 100 रुपया सावन सुरू जाता.

मागीर तुमी दुसऱ्या दिसा तुमच्या नोकरेचेर '60 करतात आनी तुमी तें तुमच्या खात्यांत जमा करतात. हें तुमच्या बँक पासबुकांत 'क्रेडीट' म्हूण दाखयलां.

☀ तुमची नवी बँक शिल्लक _____ आसा.

दुसऱ्या दिसा तुमी तुमचें बँक खातें वापरून तुमचें 30 रुपयांचें इलेक्ट्रीक बिल भरता. हें तुमच्या बँक पासबुकांत 'डेबिट' म्हूण दाखयलां.

☀ तुमची बँक शिल्लक आतां _____ जाल्या.

दुसऱ्या दिसा तुमी तुमच्या 150 च्या वेवसाया खातीर व्हड खरेदी करतात. परत हें डेबिट म्हूण दाखयतात

☀ आतां तुमची बँक बॅलन्स कितली? _____

हें शक्य आसा?

हय, कांय बँको तुमच्या खात्याची शिल्लक नॅगेटिव्ह जावपाक दितात, तात्पुरती! तुमची शिल्लक नॅगेटिव्ह जाल्यार, 'व्याज' वा 'शुल्क' ह्या रुपान कांय बँको तुमचे कडल्यान अतिरिक्त रक्कम घेतात.

आदल्या दिसा तुमची सामकी व्हड खरेदी तुमकां दुसऱ्या दिसा तुमच्या वेवसायांत '200 करपाक मेळटा.

☀ आतां तुमची बँक बॅलन्स कितली? _____

‘क्रेडिट’ हो पॉझिटिव्ह आंकडो आनी ‘डेबिट’ हो नॅगेटिव्ह आंकडो अशें तुमी समजूं येता. तुमच्या सगळ्या क्रेडिटचो (पॉझिटिव्ह आंकडो) आनी डेबिटचो (नॅगेटिव्ह आंकडो) वट्ट म्हळ्यार तुमची वट्ट बँक खात्याची शिल्लक. हें पॉझिटिव्ह वा नॅगेटिव्ह आसूं येता !

सादारणपणान, तुमच्या बँक खात्यांत पॉझिटिव्ह शिल्लक दवरपाचो यत्न करप बरें !

☀ सोदून काडप

1. समजा तुमी तुमच्या बँक खात्यांत ‘0’ सावन सुरवात करतात आनी मागीर तुमचे कडेन ‘30, ‘40, आनी ‘50 चे क्रेडिट आनी ‘40, ‘50, आनी ‘60 चे डेबिट आसात. आतां तुमच्या बँक खात्याची शिल्लक कितली ?
2. समजा तुमी तुमच्या बँक खात्यांत ‘0 सावन सुरवात करतात आनी मागीर तुमचे कडेन ‘1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, आनी 128 अशे डेबिट आसात आनी मागीर तुमचे कडेन 256 एकूच क्रेडिट. आतां तुमच्या बँक खात्याची शिल्लक कितली?
3. तुमच्या बँक खात्यांत पॉझिटिव्ह शिल्लक दवरपाचो यत्न करप आनी दवरप सादारणपणान कित्याक बरें? तात्पुरतें नॅगेटिव्ह समतोल दवरप खंयच्या परिस्थितींत फायद्याचें थारूं येता?

तुमकां दिश्टी पडटा, शून्या वांगडा पॉझिटिव्ह आनी नॅगेटिव्ह आंकडो बँकींग आनी वर्ल्ड बँकेत खूब उपेगी पडटा.

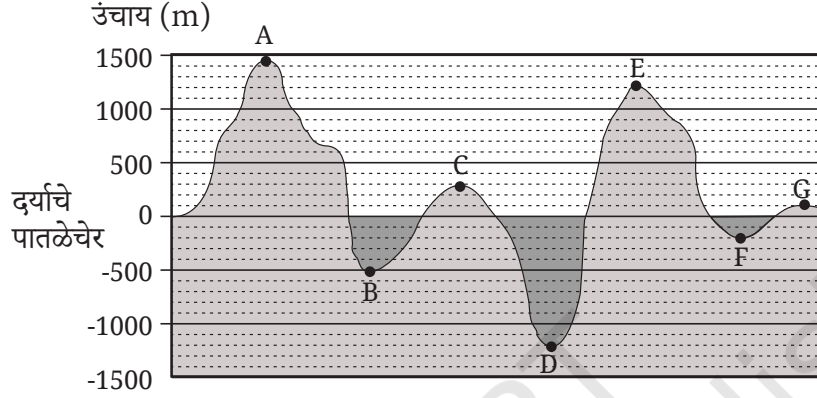
भुगोलीक क्रॉस विभाग

दोंगर, पठारां, वाळवंट ह्या भुगोलीक खाशेलपणांच्यो उंचाय आमी ‘दर्या थरासावन’ मेजतात. दर्या थराचेर उंचाय 0 मी. दर्या थरासावन उंचायेचें पॉझिटिव्ह आंकडो वापरून प्रतिनिधित्व करतात आनी दर्या थरा सकयल आशिल्ली उंचाय नॅगेटिव्ह संख्या वापरून दाखयतात.

सोदून काडप

1. भुगोलीक क्रॉस विभाग पळयल्यार, संबंदीत उंचाय भरप:

क. ख. ग. घ.
 ङ. च. छ.



शिक्षकांक टिपणी

ह्या पानांतली आकृती दाखोवन भुगोलीक क्रॉस सेक्शन कितें तें विचारात. धर्तरेचेर खंयचेय सुवातेर काडिल्ल्या उभ्या तुकड्याची कल्पना करपा सारकें. हीच गजाल बाजूच्या नदरेंतल्यान पळोवपाक मेळटली. भूगोलांतली उंचाय आनी खोलाय मेजपाखातीर 'दर्याची पातळी' हे कल्पनेचेर चर्चा करप.

- ह्या भुगोलीक क्रॉस विभागांतलो सगळ्यांत ऊंच बिंदू खंयचो? सगळ्यांत उणो बिंदू खंयचो?
- उंचायेच्या उण्या क्रमाच्या क्रमांत अ, ब, ..., ग हे बिंदू बरोवंक शकतात? उंचायेच्या वाडत्या क्रमाच्या अनुक्रमान मुद्दे बरोवंक मेळटले?
- धर्तरेवयलो दर्या थरासावन सगळ्यांत ऊंच बिंदू खंयचो? ताची उंचाय कितली?
- जमनीर वा दर्यादेगेर दर्याच्या थराचो विचार केल्यार सगळ्यांत सकयलो बिंदू खंयचो? ताची उंचाय कितली? (ही उंचाय नॅगेटिव्ह आसूंक जाय).

तापमान

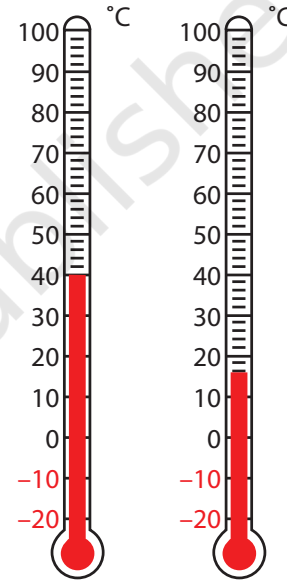
गिमाच्या दिसांनी 'उश्णतायेचें ल्हार' येता अशें तुमी खबरांनी आयकलां आसतलें. गिमाच्या दिसांनी जेन्ना तुमकां खूब गरमी दिसता तेन्ना तापमान कितलें आसतलें अशें तुमकां दिसता? शिंयाळ्यांत आमकां थंडी वा थंड तापमान आसता.

तुमच्या वाठारांत गिमाच्या दिसांनी चडांत चड तापमान आनी फाटल्या वर्सा शिंयाळ्यांत उण्यांत उणें तापमान कितलें आशिल्लें? सोदून काडात.

जेन्ना आमी तापमान मेजतात तेन्ना आमी सेल्सिअस हें मापाचें युनिट ($^{\circ}\text{C}$).. म्हूण वापरतात. सकयल आशिल्ल्या तापमापकांत 40°C .. आनी 15°C .. तापमान दाखयतात.

☀ सोदून काडप

1. भारतांत कांय अशीं थळां आसात जंय तापमान 0°C सकयल वचपाक शकता हें तुमकां खबर आसा? भारतांत केन्ना केन्नाय तापमान 0°C सकयल वता अशीं थळां सोदून काडात. ह्या जाग्यां मदीं कितें सामान्य आसा? थंय थंड कित्याक जाता आनी हेर वाठारांनी कित्याक जायना?
2. लडाखांतल्या लेहाक शिंयाळ्यांत खूब थंडी पडटा. नोव्हेंबरांतल्या एका दिसा लेहांत दीस आनी रातच्या वेगवेगळ्या वेळार घेतिल्ल्या तापमानाच्या वाचनांचें सारणी सकयल दिल्लें आसा. दीस आनी रातच्या योग्य वेळा कडेन तापमानाची जुळोवणी करची.



गणिताची
गजाल

तापमान
14°C
8°C
-2°C
-4°C

वेळ
फांतोडेर 02.00 वरांचेर
रातीं 11.00 वरांचेर
दनपारां 02.00 वरांचेर
सकाळीं 11.00 वरांचेर

शिक्षकांक टिपणी

तापमापकांविशीं आनी तापमान मेजपाखातीर तांचो उपेग कसो करतात हाचेविशीं उलयतात. वर्गांत प्रयोगशाळेचो तापमापक हाडून गरम उदक आनी थंड उदकाचें तापमान मेजप. तापमापकांत 0°C सकयल आशिल्ल्या खुणा आसात हें भुरग्यांक सांगचें. 0°C कितें दाखयता, म्हळ्यार उदकाचो फ्रिजिंग बिंदू हाचेर चर्चा करची

10.4 पूर्णांक वांगडा अन्वेशण

एक पोकळ पूर्णांक ग्रीड

4	-1	-3
-3		1
-1	-1	2

5	-3	-5
0		-5
-8	-2	7

ह्या दोनूय ग्रीडांतल्या आंकड्यांत कितें तरी खाशेलेंपण आसा. तें कितें तें आमी सोदून काडूया.

वयली रांग:	$4 + (-1) + (-3) = 0$	$5 + (-3) + (-5) = \underline{\quad}$
सकयली रांग	$(-1) + (-1) + 2 = 0$	$(-8) + (-2) + 7 = \underline{\quad}$
दावो स्तंभ:	$4 + (-3) + (-1) = 0$	$5 + 0 + (-8) = \underline{\quad}$
उजवो स्तंभ:	$(-3) + 1 + 2 = 0$	$(-5) + (-5) + 7 = \underline{\quad}$

दरेक ग्रीडांत दरेक दोन ओळींतले आंकडे (वयली रांग आनी सकयली रांग) आनी दोनूय स्तंभांतल्या दरेका स्तंभांतले आंकडे (सगळ्यांत दावो स्तंभ आनी सगळ्यांत उजवो स्तंभ) जोडून एकूच आंकडो दितात. ह्या बेरीजाक आमी 'शिमेची बेरीज' म्हणटले. पयल्या ग्रीडाची शिमेवयली बेरीज '0' आसा.

सोदून काडप

- वयर दिल्ल्या दुसऱ्या ग्रीडाची गणना करात आनी शिमेची बेरीज सोदून काडात.

2. गरजेची शिमेची बेरीज करपाक ग्रीड पुराय करात.

-10		
		-5
9		

शमिची बेरीज +4

6	8	
		-5
	-2	

शमिची बेरीज -2

7		
		-5

शमिची बेरीज -4

- वयर दिल्ल्या निमाण्या ग्रीडा खातीर, शिमेची बेरीज - 4 मेळोवपा खातीर नंबर भरपाचे एकापरस चड मार्ग सोदून काडात.
- हेर खंयच्यो ग्रीड जायत्या तरांनी भरूं येतात? ताचें कारण कितें आसूं येता?
- शीम पूर्णांक चौकोनी कोडे तयार करात आनी तुमच्या वर्गमित्रांक आव्हान दिवचें.

आंकड्यांचे अद्भुत ग्रीड !

सकयल कांय आंकडो आशिल्ली ग्रीड आसा. जो मेरेन आंकडो उरना तो मेरेन दाखयल्ले प्रमाण पावलां पाळचीं.

3	4	0	9
-2	-1	-5	4
1	2	-2	7
-7	-6	-10	-1

खंयच्याय आंकड्याचेर वर्तुळ घालप

वेचून काडिल्ल्या क्रमांकाची पंक्ती आनी स्तंभ काडप

खंयच्याय अनस्ट्राक आंकड्याचेर

जेन्ना आनीक अनस्ट्राक नंबर नासतात तेन्ना स्टॉप करप. वर्तुळाकार आंकडो जोडप.

सकयल दिल्ल्या उदाहरणांत वर्तुळाकार आंकडे अशे आसात - 1, 9, -7, -2. तीं जोडल्यार -1 मेळटा.

3	4	0	9
-2	1	-5	4
1	2	-2	7
-7	-6	-10	-1

3	4	0	9
-2	1	-5	4
1	2	-2	7
-7	-6	-10	-1

3	4	0	9
-2	1	-5	4
1	2	-2	7
-7	-6	-10	-1

3	4	0	9
-2	1	-5	4
1	2	-2	7
-7	-6	-10	-1

 सोदून काढप

- नव्यान यत्न करात, हे खेपे वेगवेगळे आंकडे वेंचून काडात. कितली सम मेळ्ळी? पयले खेपे परस वेगळें आशिल्लें? आनीक कांय फावट यत्न करात!
- तोच खेळ सकयल दिल्ल्या ग्रीडां वांगडा खेळटात. तुमकां कितें जाप मेळ्ळी?

7	10	13	16	-11	-10	-9	-8
-2	1	4	7	-7	-6	-5	-4
-11	-8	-5	-2	-3	-2	-1	0
-20	-7	-14	-11	1	2	3	4

- ह्या ग्रीडांचें इतलें खाशेलें कितें आसूं येता? आंकड्यांतली जादू काय तांची मांडावळ करपाची पद्दत वा दोनूय? अशे आनीक ग्रीड तयार करपाक मेळटले?



 सोदून काढप

- दिल्ल्या जोड्यांमदीं सगळे पूर्णांक, वाडत्या क्रमान बरोवप..
 क. 0 आनी - 7 ख. - 4 आनी 4
 ग. 8 आनी - 15 घ. - 30 and - 23
- तीन आंकडे अशे दितात की तांची बेरीज - 8 आसा.
- दोन पाशे आसात जाच्या मुखामळांचेर हे आंकडे आसात: - 1, 2, - 3, 4, - 5, 6. हे पाशे घुंवडायतना शक्य तितली सगळ्यांत ल्हान बेरीज म्हळ्यार $-10 = (-5) + (-5)$ आनी सगळ्यांत व्हडली शक्य बेरीज $12 = (6) + (6)$ आसा. (-10) आनी $(+12)$ हांचे मदले कांय आंकडे ह्या दोन पाशांचेर आंकडे जोडून मेळप शक्य ना. ते आंकडे सोदून काडात
- हे सोडोयात:

$8 - 13$	$(-8) - (13)$	$(-13) - (-8)$	$(-13) + (-8)$
$8 + (-13)$	$(-8) - (-13)$	$(13) - 8$	$13 - (-8)$

- सकयलीं वर्सां सोदून काडात.
 क. सद्याच्या वर्सा, 150 वर्सा पयलीं खंयचें वर्स आशिल्लें? _____
 ख. सद्याच्या वर्सा, 2200 वर्सा पयलीं खंयचें वर्स आशिल्लें? _____
 संकेत: 0 वर्स नाशिल्लें हें याद करात..

- ग. बी.सी.इ 680 उपरांत 320 वर्सा उपरांत खंयचें वर्स आसतलें? _____
6. सकयल दिल्ले क्रम पुराय करात:
- क. $(-40), (-34), (-28), (-22), \underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}}$
- ख. $3, 4, 2, 5, 1, 6, 0, 7, \underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}}$
- ग. $\underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}}, 12, 6, 1, (-3), (-6), \underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}}$
7. हातूंत स पूर्णांक कार्डां आसात: $(+1), (+7), (+18), (-5), (-2), (-9)$.
 हातूंतलें खंयचेंय वेंचून काडूं येता आनी अदीक आनी वजाबाकी वापरून अभिव्यक्ती करूं येता.
 हातूंत एक अभिव्यक्ती आसा: $(+18) + (+1) - (+7) - (-2)$ जें वेलू दिता $(+14)$. आतां
 कार्डां वेंचून ताचें वेलू (-30) लागीं आसा अशे तरेची अभिव्यक्ती करची.)
8. दोन पॉझिटिव्ह पूर्णांकांची बेरीज सदांच पॉझिटिव्ह आसता पूण एक (पॉझिटिव्ह पूर्णांक) -
 (पॉझिटिव्ह पूर्णांक) पॉझिटिव्ह वा नॅगेटिव्ह आसूं येता. कित्या विशीं
- क. (पॉझिटिव्ह) - (नॅगेटिव्ह) ख. (पॉझिटिव्ह) + (नॅगेटिव्ह)
 ग. (नॅगेटिव्ह) + (नॅगेटिव्ह) घ. (नॅगेटिव्ह) - (नॅगेटिव्ह)
 ड. (नॅगेटिव्ह) - (पॉझिटिव्ह) च. (नॅगेटिव्ह) + (पॉझिटिव्ह)
9. ह्या दोरयेची वट्ट 100 टोकन एका विशिश्ट पद्दतीन मांडल्यात. दोरयेचो वेलू कितें?



10.5 इतिहासाचो चिमटो

सादारण अपूर्णाकां भशेन, सामान्य पूर्णांकांची (शून्य आनी नॅगेटिव्ह संख्या धरून) हजारांनी वर्सां पयलीं आशियांत पयलीं कल्पना करून ताचो उपेग केलो, निमाणें ते चड आधुनिक काळांत संवसारभर पातळ्ळ्यात.

नॅगेटिव्ह आंकड्यांच्या वापराचीं पयलीं ज्ञात उदाहरणां हिशोबाच्या संदर्भांत घडल्यांत. चीनाच्या एका म्हत्वाच्या गणितीय ग्रंथांत, द नाइन चॅप्टर्स ऑन मॅथेमॅटिकल आर्ट (जिउझांग सुआंशु) - जी इ. स. पयल्या वा दुसऱ्या शेंकड्यामेरेन पुराय जाली- तांबड्या आनी काळ्या दांड्यांचो वापर करून पॉझिटिव्ह आनी नॅगेटिव्ह आंकडो दाखयला, जशें आमी तांबडे आनी काळें टोकन वापरून तांचें प्रतिनिधित्व केलें!

पुर्विल्ल्या काळांत भारतांत लेखाशास्त्राची बळिश्ट संस्कृताय आशिल्ली. क्रेडिट आनी डेबिट हे संकल्पनेविशीं कौटिल्यान आपल्या अर्थशास्त्रांत (बी.सी.इ. सुमार 300) व्हड प्रमाणांत बरयलां, तातूंत खात्याची शिल्लक नॅगेटिव्ह आसूं येता ही मान्यताय आस्पावता. हिशोबाच्या संदर्भांत नॅगेटिव्ह संख्यांचो स्पश्ट उपेग जायत्या पुर्विल्ल्या भारतीय कृतींत दिसून येता, तातूंत सी.इ 300 वर्साच्या सुमाराक बक्षीली हातबरपांत आस्पाव जाता, जंय आंकड्या उपरांत दवरिल्ल्या खाशेल्या चिन्हाचो वापर करून एक नॅगेटिव्ह संख्या बरयल्ली (आयज आमी करतात तशी संख्या पयलीं न्हय).

पॉझिटिव्ह संख्या, नॅगेटिव्ह संख्या आनी शून्य हांचो पयलो सर्वसादारण उपचार – सगले समान प्रमाणांत समान प्रमाणांत जाचेर बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार आनी भागाकार हीं मुळावीं कार्यां करूं येतात – ब्रह्मगुप्तान सी.इ. 628 वर्सा आपल्या ब्रह्मा-स्फुआ-सिध्दान्त ह्या ग्रंथांत दिल्या. ब्रह्मगुप्तान पॉझिटिव्ह, नॅगेटिव्ह आनी शून्य ह्या सगळ्या आंकड्यांचेर ऑपरेशना खातीर स्पश्ट आनी स्पश्ट नेम दिल्ले जे मुळांत आमी आयजूय वापरतात ते हे आंकडे समजून घेवपाची आधुनीक पद्दत तयार जाली!

पॉझिटिव्ह संख्या, नॅगेटिव्ह संख्या आनी शून्य हांची जोड आनी वजा करपाचे ब्रह्मगुप्ताचे कांय मुखेल नेम सकयल दिल्ले आसात:

ब्रह्मगुप्ताचे अदीकाचे नेम (ब्रह्मा-स्फुआ-सिध्दान्त 18.30, बी.सी. 628)

1. दोन पॉझिटिव्ह सम पॉझिटिव्ह आसता (देखीक, $2 + 3 = 5$).
2. दोन नॅगेटिव्हची सम नॅगेटिव्ह आसता. दोन नॅगेटिव्ह जोडपाखातीर आंकडो (चिन्नां नासतना) जोडचो आनी उपरांत निकाल मेळोवपा खातीर वजा चिन्ह दवरचें (देखीक., $(-2) + (-3) = -5$).
3. पॉझिटिव्ह संख्या आनी नॅगेटिव्ह संख्या जोडपाखातीर चड संख्येंतल्यान (चिन्ह नासतना) ल्हान संख्या (चिन्ह नासतना) वजा करून निकाल मेळोवपा खातीर चड संख्येचें चिन्ह दवरचें (देखीक., $-5 + 3 = -2$, $2 + (-3) = -1$ आनी $-3 + 5 = 2$).
4. संख्या आनी ताचो प्रतिलोम हांचो बेरीज शून्य आसता (देखीक., $2 + (-2) = 0$).
5. खंयच्याय आंकड्याची आनी शून्याची बेरीज एकूच आसता (देखीक., $-2 + 0 = -2$ आनी $0 + 0 = 0$).

ब्रह्मगुप्ताचे वजाबाकीचे नेम (ब्राह्मा-स्फुआ-सिध्दान्त 18.31-18.32)

1. व्हडल्या पॉझिटिव्हतल्यान ल्हान पॉझिटिव्ह वजा केल्यार ताचो परिणाम पॉझिटिव्ह (देखीक, $3 - 2 = 1$) जाता..
2. ल्हान पॉझिटिव्हतल्यान व्हडलो पॉझिटिव्ह वजा केल्यार ताचो परिणाम नॅगेटिव्ह (देखीक, $2 - 3 = -1$) जाता).
3. नॅगेटिव्ह संख्या वजा करप म्हळ्यार संबंदीत धनात्मक संख्या जोडपा सारकीच (देखीक, $2 - (-3) = 2 + 3$).
4. स्वता कडल्यान संख्या वजा केल्यार शून्य मेळटा (देखीक, $2 - 2 = 0$ आनी $-2 - (-2) = 0$).
5. संख्येंतल्यान शून्य वजा केल्यार एकूच आंकडो मेळटा (देखीक, $-2 - 0 = -2$ आनी $0 - 0 = 0$). शून्यांतल्यान संख्या वजा केल्यार त्या आंकड्याचो व्युत्क्रम मेळटा (देखीक, $0 - (-2) = 2$)..

एकदां ब्रह्मगुप्ताचे नेम समजून घेतले उपरांत खंयच्याय आंकड्यान अदीक आनी वजाबाकीचें काम करूं येता – पॉझिटिव्ह, नॅगेटिव्ह आनी शून्य!

सोदून काडप

1. बेलाच्या बिल्डिंग ऑफ फनाचे बाबतींत वा नंबर लायनीचे नदरेन ब्रह्मगुप्ताचो दरेक नेम स्पश्ट करपाक शकता?
2. दर एका नेमाचीं स्वताचीं उदाहरणां दिवचीं.

शून्याचें वर्णन सगळ्यांत पयलीं पॉझिटिव्ह संख्या तशेंच नॅगेटिव्ह संख्या आशिल्ल्या समान पांवड्यार आशिल्ली संख्या अशें केलें आनी अशा सगळ्या आंकड्यांचेर, पॉझिटिव्ह, नॅगेटिव्ह आनी शून्य हांचेर अंकगणितीय क्रिया करपाखातीर स्पश्ट नेम दिवपी सगळ्यांत पयलीं – जाका आतां वलय अशें म्हणटात. ताका लागून संवसार गणित करपाची पद्दत बदलतली.

पूण शून्य आनी नॅगेटिव्ह आंकडो आंकडो म्हूण आपणावपाक बाकीच्या संवसाराक जायतीं शतकां लागलीं. तेराव्या शेंकड्यामेरेन युरोपांत पावचे पयलीं 9 व्या शेंकड्यामेरेन अरब जगान ह्या आंकड्यांचो प्रसार केलो, मान्य केलो आनी फुडें अभ्यास केलो.

अजापाची गजाल म्हणल्यार अठराव्या शेंकड्यांतूय जायत्या युरोपीय गणितज्ञांनी अजूनय नॅगेटिव्ह आंकडो मान्य केलो ना. अठराव्या शेंकड्यांतलो फ्रेंच गणितज्ञ लाझारे कार्नेट हाणें नकारात्मक आंकड्यांक ‘बेतुके’ अशें म्हळां. पूण कालांतरान शून्य तशेंच नॅगेटिव्ह आंकडो संवसारीक गणित आनी विज्ञानांत अपरिहार्य थारलो आनी आतां तांकां सकारात्मक आंकड्या वांगडा आनी तितलेच म्हत्वाचे समान पांवड्यार क्रिटिकल नंबर मानतात - जशें ब्रह्मगुप्तान इ. स. 628 वर्सा शिफारस केल्ली आनी स्पश्टपणान वर्णन केल्लें! सगळ्या आंकड्यांचेर अंकगणिताच्या नेमांचें हें अमूर्त बीजगणिताच्या आधुनीक विकासाचो मार्ग मेकळो जालो, जाचे विशीं आमी फुडल्या वर्गांत शिकतले.

सारांश

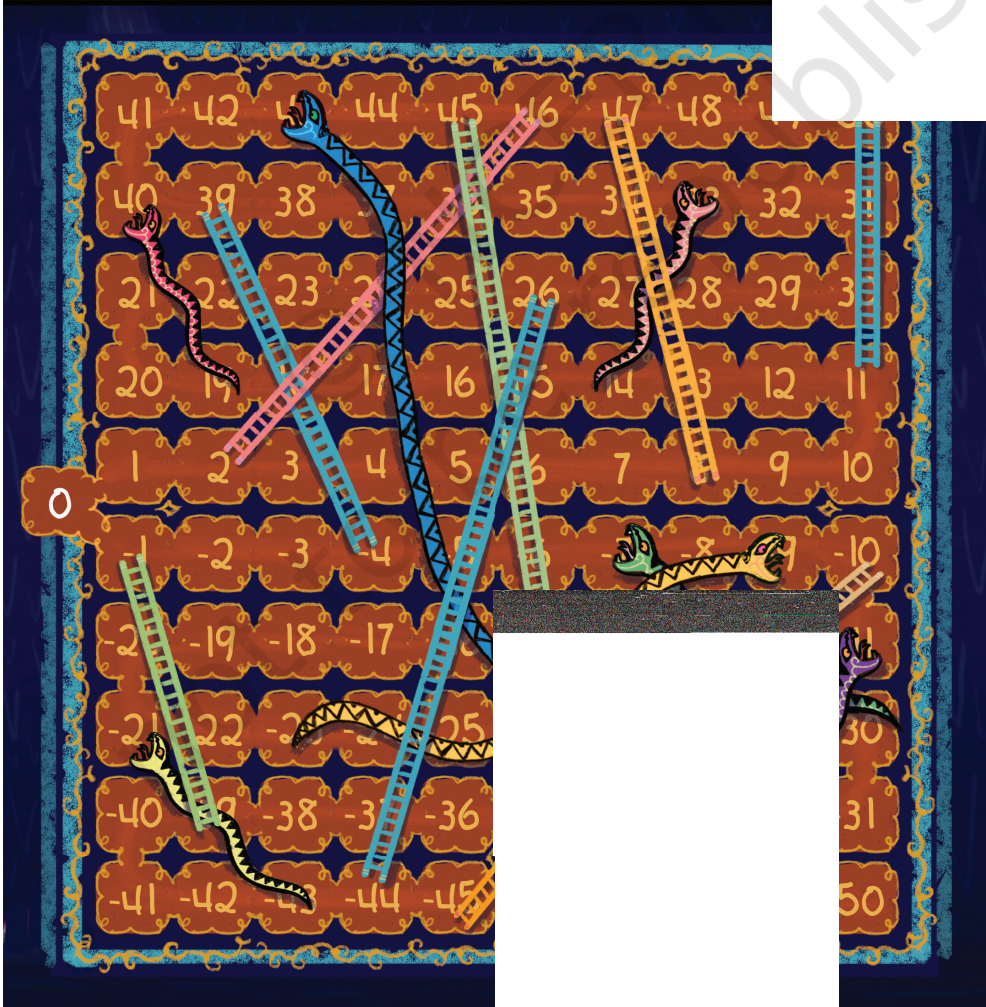
- शून्या परस उणे अशे आंकडे आसात. तांच्या मुखार ‘-’ चिन्न दवरून (देखीक, -2) बरयल्ले आसून तांकां नॅगेटिव्ह आंकडे म्हण्टात. ते नंबर लायनीचेर शून्याचे दावे वटेन पडटात.
- आंकडो $\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ पूर्णांक म्हण्टात. आंकडो $1, 2, 3, 4, \dots$ तांकां पॉझिटिव्ह पूर्णांक म्हण्टात आनी $\dots, -4, -3, -2, -1$ ह्या संख्यांक नॅगेटिव्ह पूर्णांक म्हण्टात. शून्य (0) हो पॉझिटिव्ह वा नॅगेटिव्ह न्हय.
- दरेक दिल्ल्या आंकड्याक ताचे कडेन आनीक एक आंकडो संबंदीत आसता जो दिल्ल्या आंकड्यांत जोडल्यार शून्य मेळटा. हाका आंकड्याचो योजक व्युत्क्रम अशें म्हण्टात. देखीक- 7 चो योजक प्रतिलोम -7 आनी -543 चो योजक प्रतिलोम 543 आसता.
- अदीक म्हळ्यार सुरवातीची स्थिती + हालचाल = लक्ष्य स्थिती असो अर्थ काडूं येता.
- हालचालींचो मेळ वा वाड/देवप अशेंय अदीकाचो अर्थ काडूं येता: हालचाल 1 + हालचाल 2 = एकूण हालचाल.
- वजाबाकीचो अर्थ लक्ष्य स्थिती - सुरवातीची स्थिती = हालचाल असो करूं येता.

- सादारणपणान ब्रह्मगुप्ताच्या जोड नेमाक पाळो दिवन आमी दोन आंकडे जोडूंक शकतात:
 - क. दोनूय आंकडे पॉझिटिव्ह आसल्यार आंकडो जोडचो आनी ताचो परिणाम पॉझिटिव्ह आंकडो (देखीक, $2 + 3 = 5$) जाता.
 - ख. दोनूय आंकडे नॅगेटिव्ह आसल्यार संख्या जोडचीं (चिन्नां नासतना), आनी उपरांत निकाल मेळोवपा खातीर वजा चिन्ह दवरचें ($-2 + (-3) = -5$).
 - ग. एक आंकडो पॉझिटिव्ह आनी दुसरो नॅगेटिव्ह आसल्यार चड संख्येंतल्यान (चिन्ह नासतना) ल्हान संख्या (चिन्ह नासतना) वजा करून निकाल मेळोवपा खातीर चड संख्येचें चिन्ह दवरचें (देखीक, $-5 + 3 = -2$).
 - घ. एक संख्या प्लस ताचो योजक प्रतिलोम शून्य आसता (देखीक, $2 + (-2) = 0$).
 - ड. संख्या प्लस शून्य परत तोच आंकडो दिता (देखीक, $-2 + 0 = -2$).
- गणिताचे अदीक गणितांत रुपांतर करून आनी उपरांत जोडपाचे नेम पाळून आमी दोन पूर्णांक वजा करूंक शकतात. पूर्णांकाची वजाबाकी, ताच्या योजक विपर्यास जोडपा सारकीच आसता.
- पूर्णांकांची तुळा करूं येता: $\dots - 3 < -2 < -1 < 0 < +1 < +2 < +3 < \dots$ संख्या रेशेचेर व्हड संख्येचे दावे वटेन ल्हान आंकडे आसतात.
- पॉझिटिव्ह आनी नॅगेटिव्ह आंकड्यांक क्रेडीट आनी डेबिट असो अर्थ लावन आमी तांकां अर्थ दिवंक शकतात. तशेंच पॉझिटिव्ह आंकड्यांचो अर्थ भूंय पांवड्या सारक्या संदर्भ बिंदूपरस चड अंतर अशेंय करूं येता. तशेंच नॅगेटिव्ह आंकड्यांचो अर्थ भूंयपृष्ठा सकयल आशिल्लें अंतर असो करूं येता. अंश सेल्सिअसांत तापमान मेजतना पॉझिटिव्ह तापमान म्हळ्यार उदकाच्या फ्रिजिंगाच्या बिंदूपरस चड आनी नॅगेटिव्ह तापमान म्हळ्यार उदकाच्या फ्रिजिंगाच्या बिंदूच्या सकयल आशिल्लें तापमान.

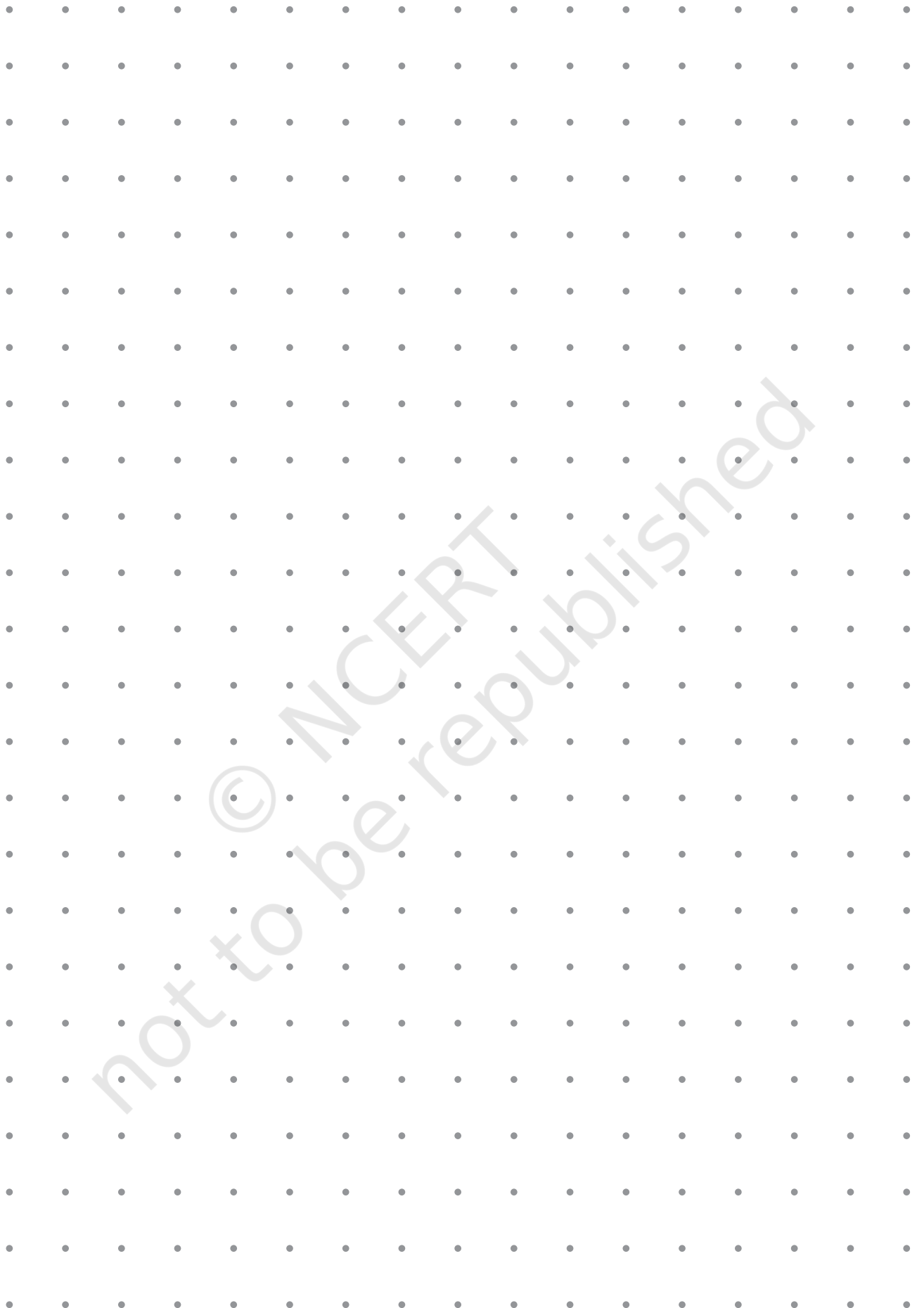
पूर्णांक: साप आनी शिडी

नेम

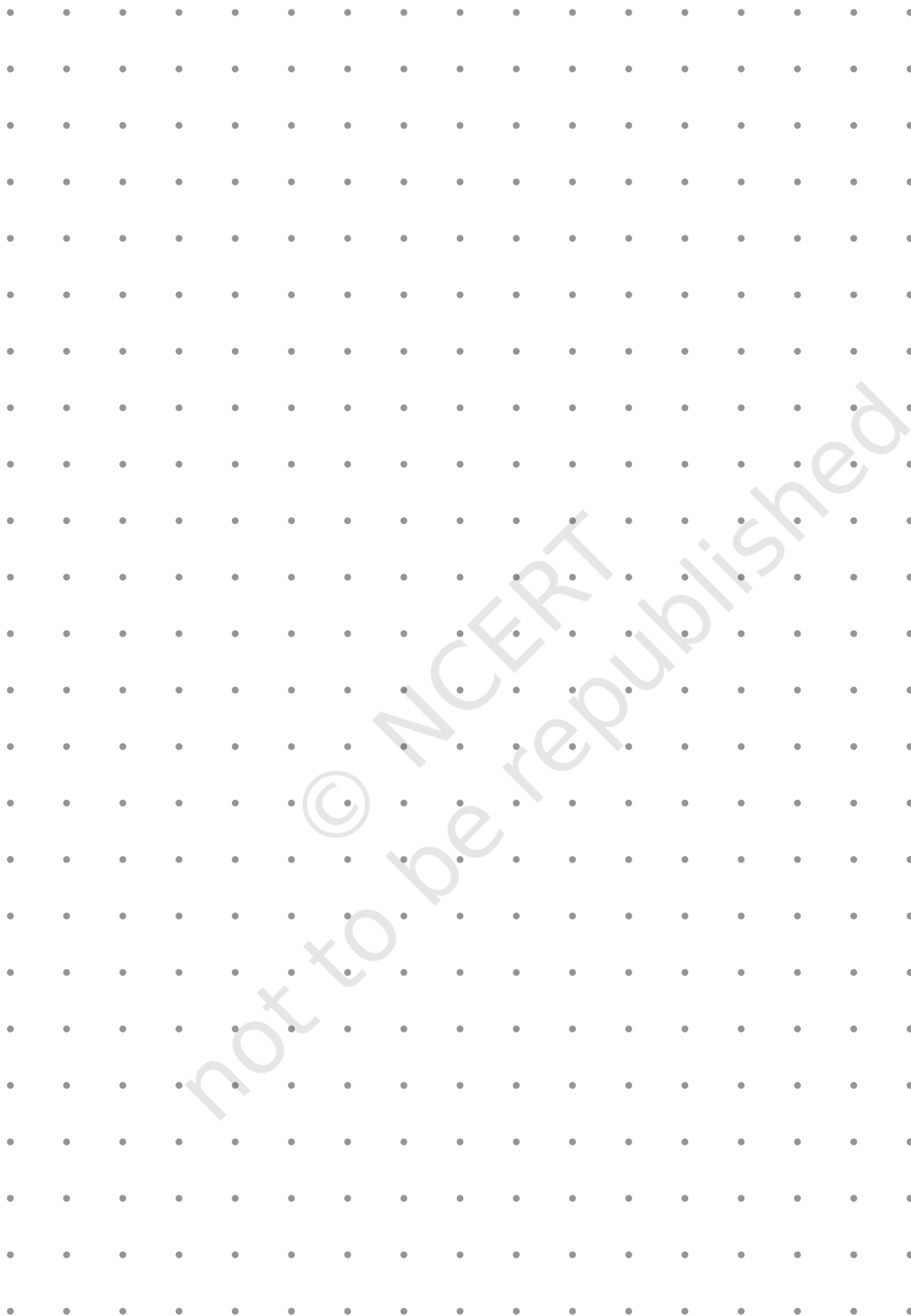
- हो दोन खेळगड्यांचो खेळ. दर एका खेळगड्याक 1 प्यादे आसतात. दोनूय खेळगडे 0 वयल्यान सुरवात करतात. खेळगडे जिखपा खातीर एकतर -50 वा $+50$ मेरेन पावपाक शकतात पूण खेळा पयलीं वा वेळार हें थारावपाची वा दुरुस्त करपाची गरज ना..
- दरेक खेळगडो एका वेळार दोन पाशे घुंवडायता. एका पाशाक $+1$ ते $+6$ मेरेनचे आंकडे आसतात आनी दुसऱ्या पाशाक -1 ते -6 मेरेनचे आंकडे आसतात.
- दोनूय पाशाच्या दर एका रोला उपरांत, खेळगडो खंयच्याय क्रमान तीं जोडूंक वा वजा करूंक शकता आनी मागीर निकाल दाखोवपी स्टेप्स हालूंक शकता. पॉझिटिव्ह परिणाम म्हळ्यार $+50$ कडेन वचप आनी नॅगेटिव्ह परिणाम म्हळ्यार -50 कडेन वचप.



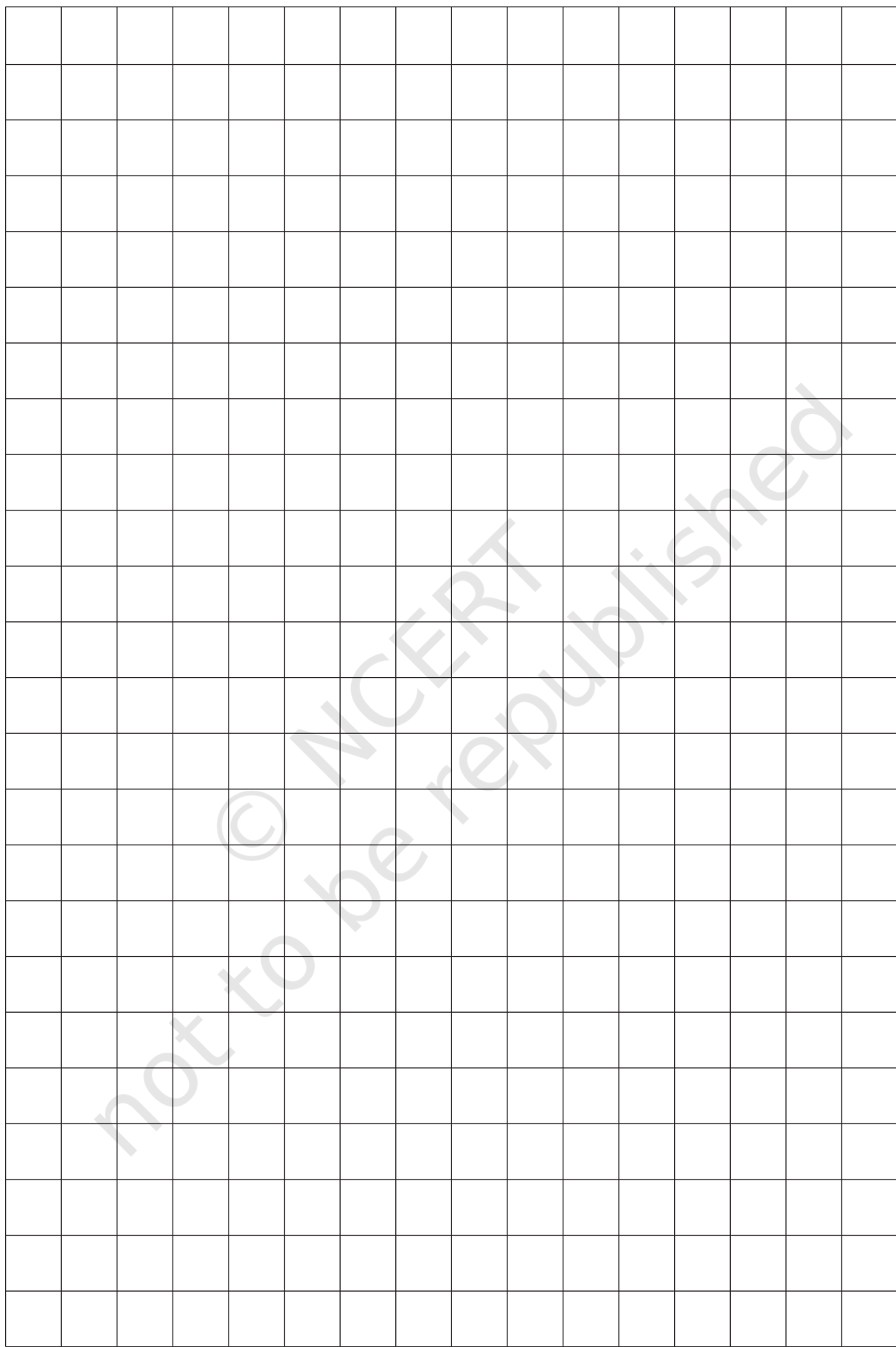
शिकपाचे साहित्य पत्रक

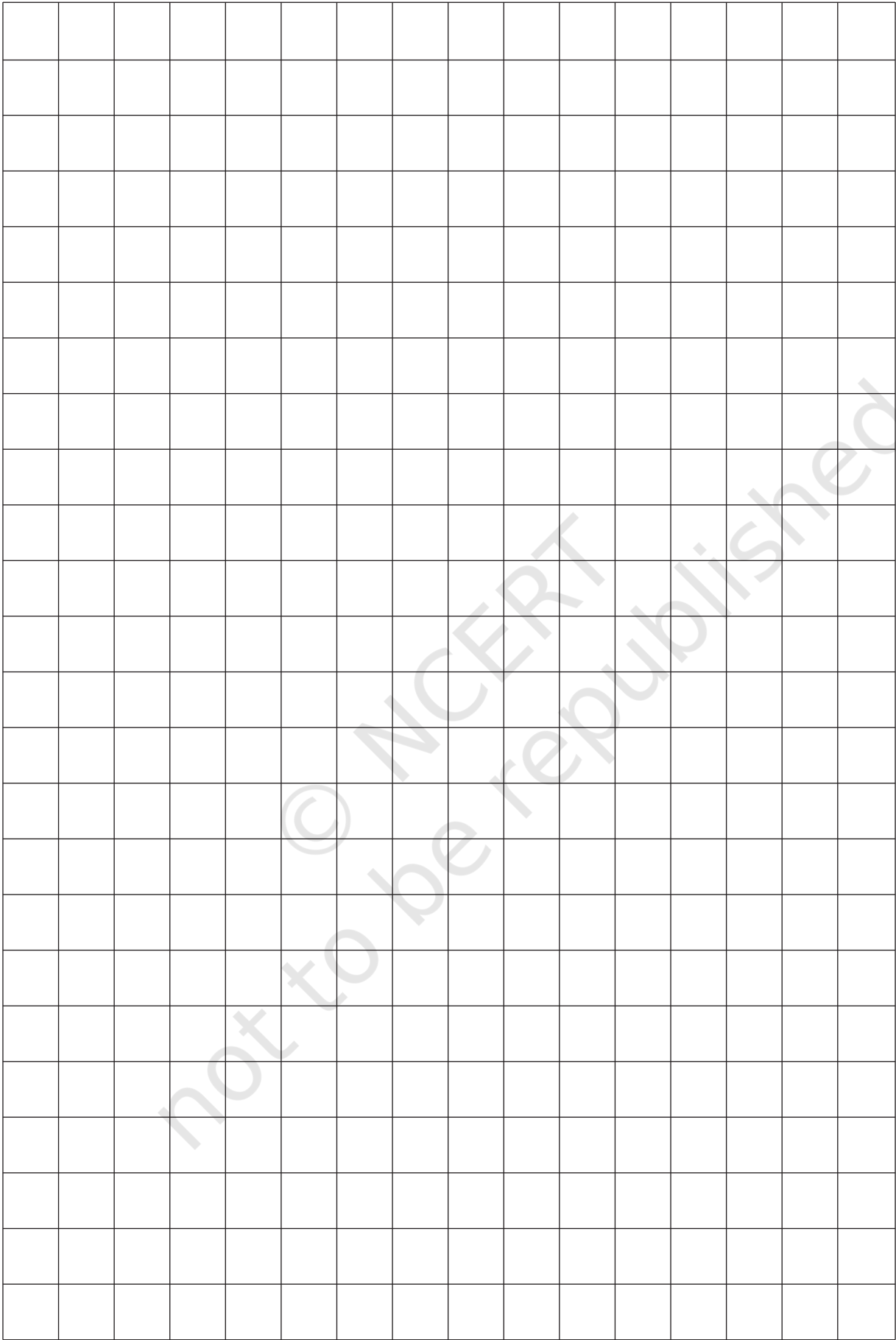


© NCERT
not to be republished



© NCERT
not to be republished

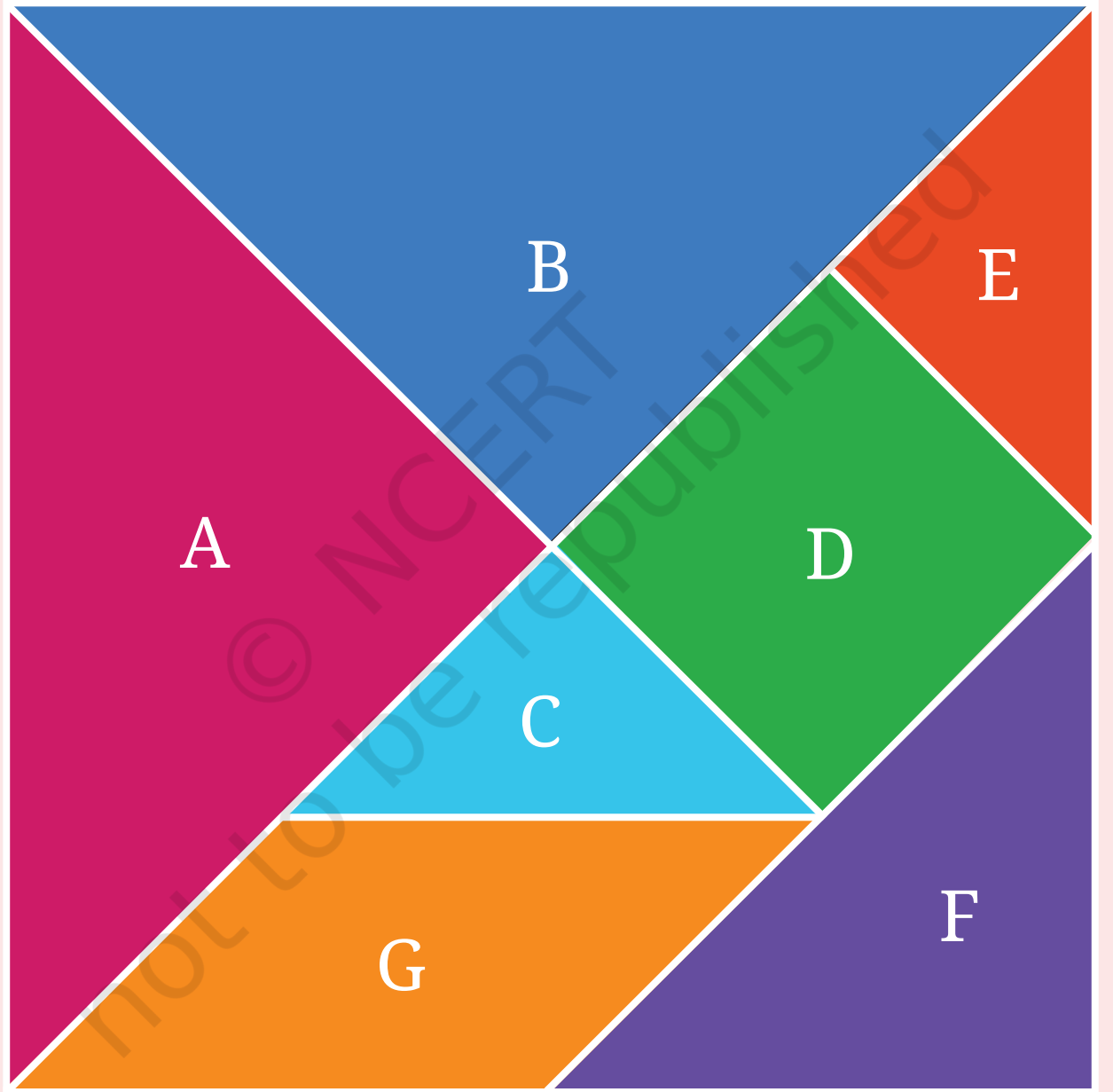






तांग्राम

टिप: दरेक आकार धवे शिमेवयल्यान कापप.





© NCERT
not to be republished





फ्रैक्शन वॉल

टिप: धव्या शिमेवयल्यान दरेक आकार कापचो.

१ एकक									
$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{2}$		$\frac{3}{3}$		$\frac{4}{4}$		$\frac{5}{5}$	
$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{4}$		$\frac{4}{5}$		$\frac{5}{6}$	
$\frac{1}{4}$		$\frac{2}{4}$		$\frac{3}{5}$		$\frac{4}{6}$		$\frac{5}{7}$	
$\frac{1}{5}$		$\frac{2}{5}$		$\frac{3}{6}$		$\frac{4}{7}$		$\frac{5}{8}$	
$\frac{1}{6}$		$\frac{2}{6}$		$\frac{3}{7}$		$\frac{4}{8}$		$\frac{5}{9}$	
$\frac{1}{7}$		$\frac{2}{7}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{4}{9}$		$\frac{5}{10}$	
$\frac{1}{8}$		$\frac{2}{8}$		$\frac{3}{9}$		$\frac{4}{10}$		$\frac{5}{10}$	
$\frac{1}{9}$		$\frac{2}{9}$		$\frac{3}{10}$		$\frac{4}{10}$		$\frac{5}{10}$	
$\frac{1}{10}$		$\frac{2}{10}$		$\frac{3}{10}$		$\frac{4}{10}$		$\frac{5}{10}$	



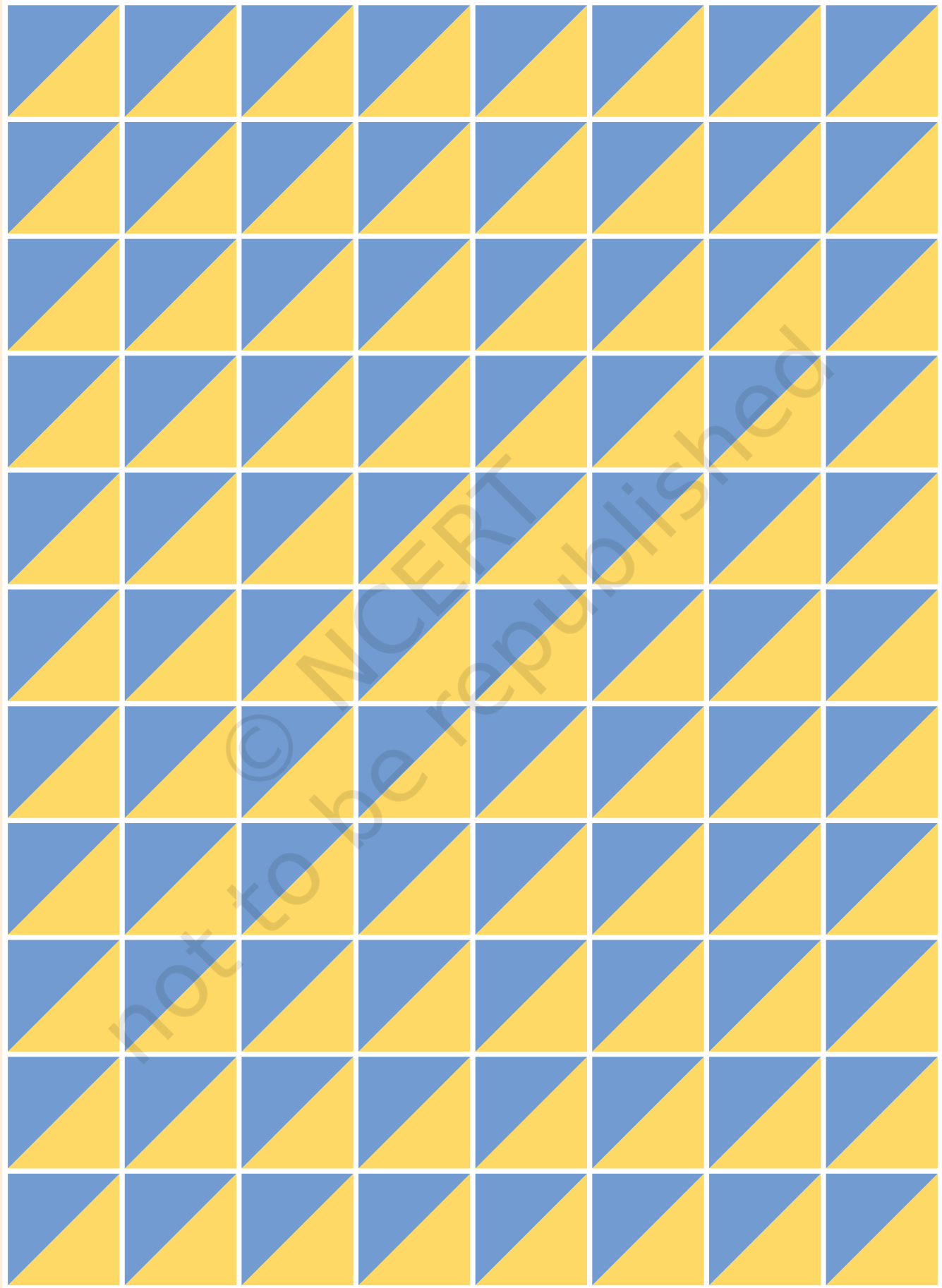


© NCERT
not to be republished





टिप: धव्या शिमेवयल्यान टायल्स कापप.





© NCERT
not to be republished



© NCERT
not to be republished

© NCERT
not to be republished