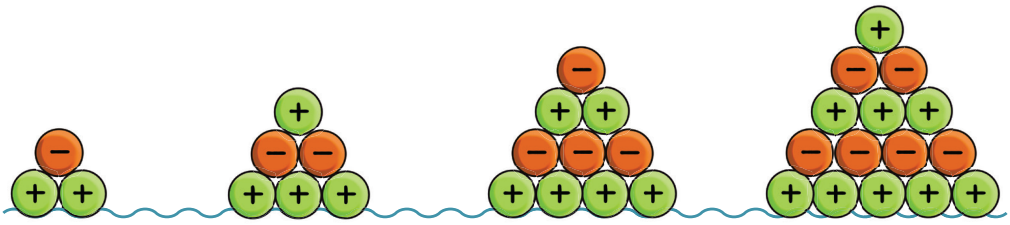


10 शून्याच्या दुसऱ्या बाजूला

0674CH10

पूर्णांक

आणखी आणि अधिक संख्या!

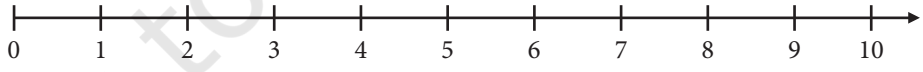
सुरुवातीला गणिताच्या अभ्यासात आपण शिकलेल्या पहिल्या संख्यांना मोजण्याच्या संख्या म्हणतात – 1, 2, 3, 4, …

यानंतर आपण अधिक संख्यांबद्दल शिकलो! उदाहरणार्थ, 0 (शून्य) ही एक संख्या आहे, जी 1 च्या आधी येते आणि काहीही नसल्याचे दर्शवते. भारतात आणि आता संपूर्ण जगात या शून्याचा फार महत्त्वाचा इतिहास आहे. उदाहरणार्थ, जगभरात आपण भारतीय संख्यात्मक पद्धतीने 0 ते 9 या अंकांचा वापर करून कोणतीही मोठी किंवा छोटी संख्या लिहू शकतो.

यानंतर आपण आणखी अशा संख्यांबद्दल शिकलो ज्या 0, 1, 2, 3, 4, … या संख्यांच्या दरम्यान असतात, जसे की $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ आणि $\frac{13}{6}$ याला म्हणतात अपूर्णांक .

पण अजूनही अधिक संख्या आहेत का? शून्य ही एक अतिरिक्त संख्या आहे जी आपल्याला आधी माहीत नव्हती, ती 1 च्या आधी आणि 1 पेक्षा लहान आहे. तर मग, शून्याच्या आधी आणि शून्यापेक्षा लहान अशा आणखी काही संख्या असतील का?

दुसऱ्या शब्दांत सांगायचे झाल्यास, आपण संख्यारेषा पाहिली आहे:



पण प्रत्यक्षात ही केवळ एक संख्याकिरण (number ray) आहे, जशी आपण भूमितीमध्ये पूर्वी शिकलो होतो; हा किरण 0 पासून सुरू होतो आणि उजवीकडे अनंतपर्यंत जातो. शून्याच्या डावीकडे अशा काही संख्या अस्तित्वात आहेत का, ज्यामुळे ही संख्याकिरण पूर्ण होऊन खरी संख्यारेषा बनेल?

हाच विषय आपण या प्रकरणात तपासून पाहणार आहोत!

© NCERT not to be republished

शून्यापेक्षा लहान संख्या असू शकते का? एखाद्या गोष्टीचे शून्यापेक्षा कमी असणे कसे शक्य आहे, याचा तुम्ही विचार करू शकता का?

10.1 बेलाची मजेदार इमारत

मुलं बेला च्या आइस्क्रीम फॅक्टरीत तिचं स्वादिष्ट आइस्क्रीम पाहण्यासाठी आणि चाखण्यासाठी गर्दी करतात. मुलांसाठी आणखी मजा वाढवण्यासाठी, बेला ने एक बहुमजली इमारत खरेदी केली आणि तिला आकर्षणांनी भरलं. तिने या इमारतीला "बेलाची मजेदार इमारत" असं नाव दिलं.

पण ही साधी इमारत नव्हती!

लक्षात घ्या की या "मजेदार इमारतीत" काही मजले जमिनीच्या खाली आहेत. तुम्हाला या मजल्यांवर कोणते दुकाने दिसतात? आणि जमिनीच्या पातळीवर काय आहे?

या इमारतीत वर-खाली जाण्यासाठी एक लिफ्ट आहे. लिफ्टमध्ये दोन बटणे आहेत – वर जाण्यासाठी '+' आणि खाली जाण्यासाठी '–'. तुम्हाला लिफ्ट दिसली का?

वेलकम हॉल येथून आर्ट सेंटरमध्ये जाण्यासाठी '+' बटण दोनदा दाबावे लागेल.

याला आपण + + किंवा +2 असे लिहितो.

जर तुम्हाला दोन मजले खाली जायचे असेल, तर '–' बटण दोनदा दाबावे लागेल, याला आपण – – किंवा –2 असे लिहितो.

म्हणजेच, जर तुम्ही +1 (म्हणजेच '+' बटण एकदा) दाबले, तर तुम्ही एक मजला वर जाल. आणि जर तुम्ही –1 (म्हणजेच '–' बटण एकदा) दाबले, तर तुम्ही एक मजला खाली जाल.

लिफ्ट बटण दाबणे आणि संख्या:
+++ याला +3 असे लिहिले जाते.
– – – – याला –4 असे लिहिले जाते.

चार मजले वर जाण्यासाठी तुम्ही +4 बटण दाबा. तीन मजले खाली जाण्यासाठी तुम्ही –3 बटण दाबा.?

© NCERT not to be republished

मौजमजेच्या इमारतीतील मजल्यांची संख्या

"मजेदार इमारती" मध्ये प्रवेश तळ मजल्यावरून होतो, ज्याला "वेलकम हॉल " म्हणतात.ग्राउंड फ्लोअरपासून, +1 बटण दाबल्यावर तुम्ही फूड कोर्ट वर पोहोचता आणि +2 बटण दाबल्यावर तुम्ही आर्ट सेन्टर वर पोहोचता. त्यामुळे आपण असे म्हणू शकतो की, फूड कोर्ट हा मजला +1 वर आहे. आर्ट सेन्टर हा मजला +2 वर आहे.

ग्राउंड फ्लोअरपासून, –1 बटण दाबल्यावर तुम्ही टॉय स्टोर वर पोहोचता. त्यामुळे टॉय स्टोर हा मजला–1 वर आहे. अशाच प्रकारे, ग्राउंड फ्लोअरपासून –2 बटण दाबल्यावर तुम्ही व्हिडिओ गेम्स दुकानात पोहोचता. त्यामुळे व्हिडिओ गेम्स दुकान मजला –2 वर आहे.

ग्राउंड फ्लोअरला 0 मजला का म्हणतात, हे तुम्हाला समजले का?

मजेदार इमारतीतील सर्व मजल्यांना क्रमांक द्या

तुम्ही लक्षात घेतले का की +3 हा बुक स्टोर चा मजला क्रमांक आहे, आणि तोच +3 बटण दाबल्यावर तुम्ही वर गेलेले मजले देखी ल दर्शवतो? त्याचप्रमाणे, –3 हा मजला क्रमांक आहे, आणि – – – असे बटण दाबल्यावर तुम्ही खाली गेलेले तीन मजले दर्शवतो.

'+' चिन्ह असलेल्या संख्येला धन संख्या (positive number) म्हणतात. '–' चिन्ह असलेल्या संख्येला ऋण संख्या (negative number) म्हणतात.

मजेदार इमारतीमध्ये, ग्राउंड फ्लोअर (0 मजला) हा संदर्भ बिंदू किंवा सुरुवात मानली आहे.ग्राउंड फ्लोअरच्या वरचे मजले धन संख्या वापरून क्रमांकित केले आहेत. तिथे जाण्यासाठी '+' बटण किती वेळा दाबले जाते यावर मजल्याचा क्रमांक ठरतो ग्राउंड फ्लोअरच्या खालील मजले ऋण संख्या वापरून क्रमांकित केले आहेत. तिथे जाण्यासाठी '–' बटण किती वेळा दाबले जाते यावर मजल्याचा क्रमांक ठरतो.

शून्य (0) ही ना धन संख्या आहे, ना ऋण संख्या. त्याच्या पुढे '+' किंवा '–' चिन्ह लावत नाही.

© NCERT not to be republished

आवश्यक हालचालींचा मागोवा ठेवण्यासाठी बेरीज

फूड कोर्ट वरून सुरू करा आणि लिफ्टमध्ये +2 दाबा. तुम्ही कुठे पोहोचाल? _____

आपण याचे वर्णन एका समीकरणाने करू शकतो:

प्रारंभिक मजला + आवश्यक हालचाल = लक्ष्य मजला

प्रारंभिक मजला +1 (फूड कोर्ट) आहे आणि बटण दाबण्याची संख्या +2 आहे. त्यामुळे, तुम्ही लक्ष्य मजल्यावर पोहोचता: **(+1) + (+2) = +3** (बुक स्टोर).

हे शोधून काढा

1. तुम्ही मजला +2 वरून सुरू करता आणि लिफ्टमध्ये –3 दाबता. तुम्ही कुठे पोहोचाल? या आवश्यक हालचालसाठी एक समीकरण लिहा.

2. खालील समीकरणांचे मूल्यांकन करा (तुम्ही त्यांना प्रारंभिक मजला + हालचाल म्हणून विचार करू शकता, "मजेदार इमारतीचा" चा संदर्भ घ्या).

   a. (+1)+(+4) = _____ b. (+4)+(+1) = _____

   c. (+4)+(– 3) = _____ d. (– 1)+(+2) = _____

   e. (– 1)+(+1) = _____ f. 0+(+2) = _____

   g. 0+(–2) = _____

3. वेगवेगळ्या मजल्यांवरून सुरू करून, मजला –5 वर पोहोचण्यासाठी आवश्यक असलेल्या हालचाली शोधा उदाहरणार्थ, जर मी मजला +2 वरून सुरू केले, तर मी –7 दाबले पाहिजे जेणेकरून मी मजला –5 वर पोहोचू समीकरण: (+2) + (–7) = –5
   अधिक अशा प्रारंभिक स्थाने आणि त्यावरून मजला –5 वर पोहोचण्यासाठी आवश्यक हालचाली शोधा आणि समीकरणे लिहा.

बटण दाबणे देखील जोडले गेले आहे

गुरमीत टॉय स्टोर मध्ये होता आणि त्याला दोन मजले खाली जायचे होते. पण चुकून त्याने '+' बटण दोन वेळा दाबले. त्याला चूक लक्षात आली आणि त्याने पटकन '–' बटण तीन वेळा दाबले. गुरमीत टॉय स्टोर च्या किती मजले खाली किंवा वर पोहोचेल?

गुरमीत एक मजला खाली जाईल. बटणे एकत्र दाबल्याने होणारी हालचाल आपण एका समीकरणाच्या रूपात दर्शवू शकतो: (+2) + (–3) = –1

© NCERT not to be republished

हे शोधून काढा

हे समीकरणे बटणे एकत्र दाबल्याने होणाऱ्या हालचालीप्रमाणे विचार करून मूल्यांकन करा:

a. $(+1)+(+4) =$ _____ b. $(+4)+(+1) =$ _____

c. $(+4)+(-3)+(-2) =$ _____ d. $(-1)+(+2)+(-3) =$ _____

पुन्हा शून्यावर!

ग्राउंड फ्लोअरवर, बसंतला खूप घाई आहे आणि चुकून त्याने +3 बटण दाबले. त्याला ते रद्द करून ग्राउंड फ्लोअरवरच राहायचे असल्यास काय करावे लागेल? तो –3 बटण दाबून ते रद्द करू शकतो. म्हणजेच, $(+3) + (-3) = 0$

आपण –3 ला +3 चे विलोम (inverse) म्हणतो. त्याचप्रमाणे, –3 चा विलोम +3 आहे.

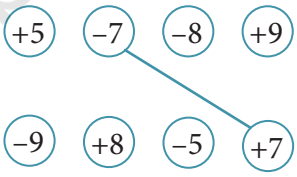
आता जर बसंतने +4 बटण दाबले आणि त्यानंतर –4 बटण दाबले, तर तो कुठे पोहोचेल?

विलोम (inverse) या संकल्पनेचा विचार करण्याचा आणखी एक मार्ग असा आहे : जर तुम्ही मजला +4 वर असाल आणि त्याचा विलोम –4 दाबलात, तर तुम्ही शून्यावर, म्हणजेच ग्राउंड फ्लोअरवर परत याल! जर तुम्ही मजला –2 वर असाल आणि त्याचा विलोम +2 दाबलात, तर तुम्ही $(-2) + (+2) = 0$, म्हणजेच ग्राउंड फ्लोअरवर पोहोचाल!

या संख्यांचे विलोम लिहा:

+4, –4, –3, 0, +2, –1.

रेषा रेखाटून विलोम जोडा.



मजल्यांचा वापर करून संख्यांची तुलना करणे

सर्वात खालच्या मजल्यावर कोण आहे?

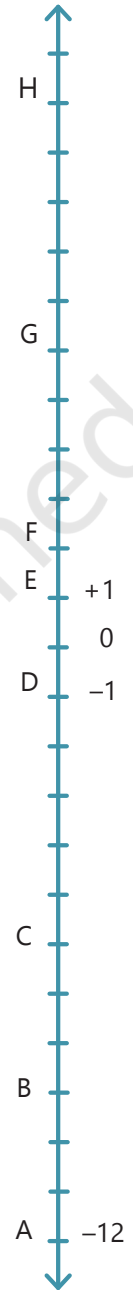
1. जय आर्ट सेंटरमध्ये आहे. तर, तो मजला +2 वर आहे.
2. असिन स्पोर्ट्स सेंटरमध्ये आहे. तर, ती मजला ____ वर आहे.
3. बिन्नू सिनेमा सेंटरमध्ये आहे. तर, ती मजला _____ वर आहे.
4. अमन टॉयज स्टोअरमध्ये आहे. तर, तो मजला _____ वर आहे.

© NCERT not to be republished

मजला +3 हा मजला +4 पेक्षा खालचा आहे. त्यामुळे, आपण +3 < +4 असे लिहितो. आपण +4 > +3 असेही लिहितो.

आपण –3 < –4 लिहावे की –4 < –3?

मजला –4 हा मजला –3 पेक्षा खालचा आहे. त्यामुळे, –4 < –3 असे लिहिले जाते. तसेच –3 > –4 असे लिहिणेही योग्य आहे.



हे शोधून काढा

1. मजेदार इमारत वापरुन खालील संख्यांची तुलना करा आणि बॉक्स भरा < किंवा >.

   a. –2 ☐ +5 b. –5 ☐ +4 c. –5 ☐ –3

   d. +6 ☐ –6 e. 0 ☐ –4 f. 0 ☐ +4

> लक्षात घ्या की सर्व ऋण संख्यांचे मजले मजला 0 च्या खाली आहेत. त्यामुळे, सर्व ऋण संख्या 0 पेक्षा लहान असतात. सर्व धन संख्यांचे मजले मजला 0 च्या वर आहेत. त्यामुळे, सर्व धन संख्या 0 पेक्षा मोठी असतात. आहेत.

2. मजेदार इमारतीत अधिक मजले आहेत असे कल्पना करा. संख्यांची तुलना करा आणि चौकटीत < किंवा > चिन्ह भरा:

   a. –10 ☐ –12 b. +17 ☐ –10

   c. 0 ☐ –20 d. +9 ☐ –9

   e. –25 ☐ –7 f. +15 ☐ –17

3. रेजर मजला A = – 12, मजला D = – 1 आणि मजला E = + 1 असेल, तर मजले B, C, F, G आणि H यांचे क्रमांक शोधा.

4. उजव्या बाजूला दर्शविलेल्या इमारतीचे खालील मजले चिन्हांकित करा.

   a. –7 b. – 4 c. +3 d. – 10

कोणते बटण दाबावे हे शोधण्यासाठी वजाबाकी

मागील वर्गात, आपण वजा करण्याचा अर्थ 'काढून टाकणे' असा समजला होता. उदाहरणार्थ, शेल्फवर 10 पुस्तके आहेत. मी 4 पुस्तके काढून घेतली. शेल्फवर किती पुस्तके उरली? आपण उत्तर वजा करून दर्शवू शकतो:

10 – 4 = 6 किंवा 'दहा मधून चार गेले, उरले सहा'.

© NCERT not to be republished

तुम्ही वजा करण्याच्या आणखी एका अर्थाशी परिचित असाल, जो तुलना किंवा प्रमाण समान करण्याशी संबंधित आहे. उदाहरणार्थ, ही परिस्थिती पहा: माझ्याकडे ₹10 आहेत आणि माझ्या बहिणीकडे ₹6 आहेत.

आता, मी असा प्रश्न विचारू शकतो: 'माझ्या बहिणीला किती रुपये मिळायला हवेत जेणेकरून तिच्याकडे माझ्याइतकीच रक्कम असेल?'

आपण हे दोन प्रकारे लिहू शकतो: 6 + ? = 10 किंवा 10 – 6 = ?

येथे, 'आवश्यक संख्या शोधणे' आणि वजा करणे यामधील संबंध दिसतो.

धन आणि ऋण संख्यांच्या वजाबाकीसाठी, आपण वजा करण्याचा हा अर्थ वापरू – 'समान करणे' किंवा 'योग्य संख्या शोधणे'. वापरू.

या दृष्टीकोनातून 15 - 5, 100 - 10 आणि 74 - 34 चे मूल्यांकन करा.

शिक्षकांसाठी सूचना

साधारणतः, जेव्हा दोन असमान प्रमाणे असतात, तेव्हा वजाबाकी त्या प्रमाणांना समान करण्यासाठी आवश्यक बदल दर्शवते. वजाबाकी हे दाखवते की सुरुवातीच्या प्रमाणात किती बदल करावा लागेल जेणेकरून ते लक्ष्य प्रमाण बनेल वेगवेगळ्या मजल्यांच्या संदर्भात, सुरुवातीच्या मजल्यावरून लक्ष्य मजल्यावर पोहोचण्यासाठी आवश्यक बदल काय आहे? लक्षात घ्या की आवश्यक बदल हा धन (वाढीसाठी) किंवा ऋण (कमी करण्यासाठी) असू शकतो.

तुमचा सुरुवातीचा मजला आर्ट सेंटर आहे आणि तुमचा टार्गेट फ्लोअर स्पोर्ट्स सेंटर आहे. आपण कोणते बटन दाबले पाहिजे??

आपल्याला तीन मजले वर जाण्याची आवश्यकता आहे, म्हणून आपण + 3 दाबावे. वजाबाकी चा वापर करून अभिव्यक्ती म्हणून आपण हे लिहू शकतो:

टार्गेट फ्लोअर – सुरुवातीचा मजला = आवश्यक हालचाल

वरील उदाहरणात, सुरुवातीचा मजला + 2 (आर्ट सेंटर) आहे आणि लक्ष्य मजला + 5 आहे. + 2 वरून + 5 वर जाण्यासाठी बटण दाबणे + 3 आहे. म्हणून

$$(+5)-(+2)=+3$$

© NCERT not to be republished

स्पष्टीकरण

बेरीज आणि वजाबाकी यातील संबंध लक्षात ठेवा. उदाहरणार्थ, 3 + ? = 5, यात गहाळ संख्या शोधण्यासाठी आपण वजाबाकी वापरतो: 5 – 3 = 2. याचा अर्थ, वजाबाकी ही गहाळ संख्या शोधण्यासारखीच आहे जी बेरीज करण्यासाठी आवश्यक आहे.
आपल्याला हे माहीत आहे की —

सुरुवातीचा मजला + आवश्यक हालचाल = लक्ष्य मजला

जर आवश्यक हालचाल शोधायची असेल, तर,

सुरुवातीचा मजला + ? = लक्ष्य मजला

म्हणून,

लक्ष्य मजला – सुरुवातीचा मजला = ? = आवश्यक हालचाल

अधिक उदाहरणे:

a. जर लक्ष्य मजला – 1 आणि सुरुवातीचा मजला – 2 असेल, तर कोणते बटन दाबाल? तुम्हाला एक मजला वर जायचे आहे, म्हणून तुम्ही + 1 दाबाल.
समीकरण: $(-1) - (-2) = (+1)$

b. जर लक्ष्य मजला - 1 असेल आणि प्रारंभ मजला +3 असेल तर आपण कोणते बटण दाबावे? आपल्याला चार मजले खाली जाण्याची आवश्यकता आहे, म्हणून, आपण दाबले पाहिजे - 4.
समीकरण: $(-1) - (+3) = (-4)$

c. जर लक्ष्य मजला + 2 आणि सुरुवातीचा मजला – 2 असेल, तर कोणते बटन दाबाल? तुम्हाला चार मजले वर जायचे आहे, म्हणून तुम्ही + 4 दाबाल.
समीकरण: $(+2) - (-2) = (+4)$

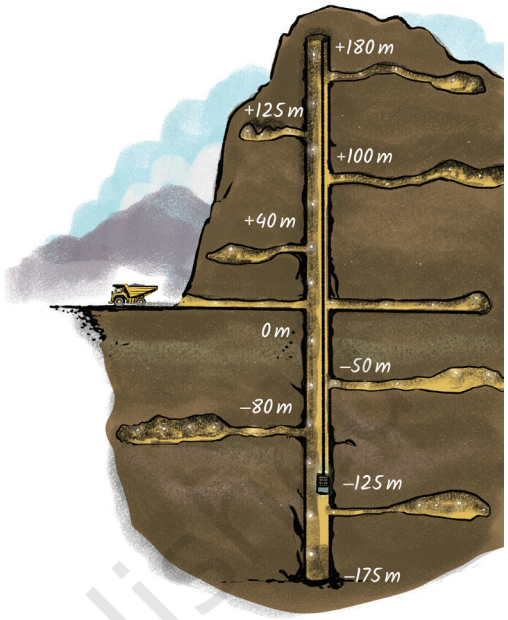
हे शोधून काढा

ही समीकरणे पूर्ण करा. तुम्ही त्यांना लक्ष्य मजल्यावर पोहोचण्यासाठी आवश्यक हालचाल म्हणून विचार करू शकता.

a. $(+1) - (+4) =$ _____
b. $(0) - (+2) =$ _____
c. $(+4) - (+1) =$ _____
d. $(0) - (-2) =$ _____
e. $(+4) - (-3) =$ _____
f. $(-4) - (-3) =$ _____
g. $(-1) - (+2) =$ _____
h. $(-2) - (-2) =$ _____
i. $(-1) - (+1) =$ _____
j. $(+3) - (-3) =$ _____

© NCERT not to be republished

मोठ्या संख्यांची बेरीज आणि वजाबाकी



चित्रात खाण दाखवली आहे, जिथे खडकात खोदकाम करून खनिजे काढली जातात. ट्रक जमिनीच्या पातळीवर आहे, पण खनिजे जमिनीच्या वर आणि खाली दोन्ही ठिकाणी असतात. खाणीत वेगाने हालचाल करणारी लिफ्ट आहे, जी लोक आणि खनिजे घेऊन वरखाली फिरते. काही पातळ्या चित्रात दाखवल्या आहेत.

चित्रात काही स्तर चिन्हांकित केले आहेत. भूमी स्तर 0 म्हणून दर्शविला आहे भूमीच्या वरचे स्तर धनात्मक संख्यांनी दर्शविले जातात आणि भूमीच्या खालील स्तर ऋणात्मक संख्यांनी दर्शविले जातात ही संख्या भूमीच्या स्तरापेक्षा किती मीटर वर किंवा खाली आहे हे दर्शवते.

खाणीत, अगदी मजेदार इमारतीप्रमाणे:

प्रारंभ पातळी + हालचाल = लक्ष्य पातळी

उदाहरणार्थ

$(+40)+(+60)=+100$ $\quad$ $(-90)+(-55)=-145$

लक्ष्य पातळी - प्रारंभ पातळी = हालचाल आवश्यक

उदाहरणार्थ

$(+40)-(-50)=+90$ $\quad$ $(-90)-(+40)=-130$

नकारात्मक संख्या किती आहेत?

बेलाच्या मजामजल्यांच्या इमारतीत फक्त सहा मजले वर आणि पाच मजले खाली होते, म्हणजेच संख्या – 5 ते + 6. वर दाखवलेल्या खाणीत, संख्या – 200 ते + 180 पर्यंत आहेत. पण आपण यापेक्षा मोठ्या इमारती किंवा खाणीची कल्पना करू शकतो. जसे सकारात्मक संख्या + 1, + 2, + 3, ... शेवट नसल्यासारख्या वर जात राहतात, तसेच नकारात्मक संख्या – 1, – 2, – 3, ... शेवट नसल्यासारख्या खाली जात राहतात. सकारात्मक आणि नकारात्मक संख्या, आणि शून्यासह, यांना पूर्णांक म्हणतात. त्या 0 पासून दोन्ही बाजूंना विस्तारतात: ... – 4, – 3, – 2, – 1, 0, 1, 2, 3, 4, ...

© NCERT not to be republished

हे शोधून काढा

हे समीकरण पूर्ण करा.

a. $(+40) +$ _____ $= +200$ b. $(+40) +$ _____ $= -200$

c. $(-50) +$ _____ $= +200$ d. $(-50) +$ _____ $= -200$

e. $(-200) - (-40) =$ _____ f. $(+200) - (+40) =$ _____

g. $(-200) - (+40) =$ _____

खाणीतील हालचालींचा विचार करून आपली उत्तरे तपासा.

कोणत्याही संख्यांची बेरीज, वजाबाकी आणि तुलना करणे

अजून मोठ्या पूर्णांकांची बेरीज आणि वजाबाकी करण्यासाठी, आपण अजून मोठ्या लिफ्टची कल्पना करू शकतो! खरं तर, आपण अशी लिफ्ट कल्पू शकतो जी पातळी 0 पासून वर आणि खाली अंतहीन जाऊ शकते. यासाठी कोणतीही इमारत किंवा खाण असण्याची गरज नाही — फक्त एक 'अमर्याद लिफ्ट'!

आपण ही कल्पना वापरून कोणत्याही पूर्णांकांची बेरीज आणि वजाबाकी करू शकतो.

उदाहरणार्थ, आपण $+2000 - (-200)$ ही वजाबाकी करायची आहे असे धरू.

आपण अशी लिफ्ट कल्पू शकतो जी जमिनीपासून 2000 पातळ्या वर आणि 200 पातळ्या खाली आहे. लक्षात ठेवा,

लक्ष्य पातळी – सुरुवातीची पातळी = आवश्यक हालचाल

सुरुवातीच्या मजल्यावर -200 वरून लक्ष्य मजल्यावर $+2000$ पर्यंत जाण्यासाठी, आपल्याला $+2200$ दाबावे लागेल ($+200$ शून्यापर्यंत पोहोचण्यासाठी आणि त्यानंतर $+2000$ पुढे जाण्यासाठी). म्हणून, $(+2000) - (-200) = +2200$.

लक्षात घ्या की $(+2000) + (+200)$ देखील $+2200$ आहे.

पुढील समीकरणांचे मूल्यांकन करण्याचा प्रयत्न करा, त्यासाठी योग्य लिफ्ट काढून किंवा कल्पना करून:

a. $-125 + (-30)$ b. $+105 - (-55)$

c. $+105 + (+55)$ d. $+80 - (-150)$

e. $+80 + (+150)$ f. $-99 - (-200)$

g. $-99 + (+200)$ h. $+1500 - (-1500)$

© NCERT not to be republished

वरील उदाहरणात आपण पाहिले की, $+2000 - (-200) = +2000 + (+200) = +2200$ म्हणजेच, एखाद्या निगेटिव्ह संख्येचे वजाबाकी करणे म्हणजे त्या संख्येच्या पॉझिटिव्ह रूपाची बेरीज करणे होय म्हणूनच, निगेटिव्ह संख्येचे वजाबाकी हे पॉझिटिव्ह संख्येच्या बेरीजने बदलता येते!

वरील उदाहरणांमध्ये तुम्ही केलेल्या इतर सरावांमध्ये, तुम्हाला लक्षात आले का की निगेटिव्ह संख्येचे वजाबाकी करणे म्हणजे त्या संख्येच्या पॉझिटिव्ह रूपाची बेरीज करणे आहे?

गणित बोलणे

वरील अमर्याद लिफ्ट पाहा. ती तुम्हाला संख्या रेषेची आठवण करून देते का? कोणत्या प्रकारे?

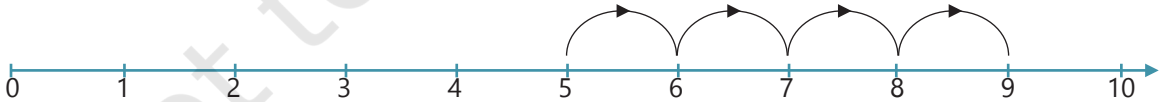
संख्या रेषेकडे परत

वरील 'अमर्याद लिफ्ट' संख्या रेषेसारखीच दिसत होती, बरोबर ना? प्रत्यक्षात, जर आपण तिला 90° ने फिरवले, तर ती मूलतः संख्या रेषा बनते. ही लिफ्ट आपल्याला संख्या किरण पूर्ण करून संख्या रेषा कशी बनवायची हे सांगते आणि आपण या प्रकरणाच्या सुरुवातीला विचारलेला प्रश्न सोडवते. शून्याच्या डावीकडे निगेटिव्ह संख्या $-1, -2, -3, \ldots$

असतात सामान्यतः, पॉझिटिव्ह संख्यांवरील '+' चिन्ह टाकून आपण त्या फक्त $1, 2, 3, \ldots$ असे लिहितो.

संख्या रेषेवर लिफ्टने प्रवास करण्याऐवजी, आपण फक्त त्यावर चालत असल्याची कल्पना करू शकतो. उजवीकडे पॉझिटिव्ह (समोरची) दिशा आहे आणि डावीकडे निगेटिव्ह (मागे जाणारी) दिशा आहे. लहान संख्या आता मोठ्या संख्यांच्या डावीकडे असतात आणि मोठ्या संख्या लहान संख्यांच्या उजवीकडे असतात. त्यामुळे, $2 < 5$; $-3 < 2$; and $-5 < -3$.

जर तुम्हाला 5 ते 9 पर्यंत जायचे असेल तर नंबर लाईनवरून किती अंतराचा प्रवास करावा लागेल?



© NCERT not to be republished

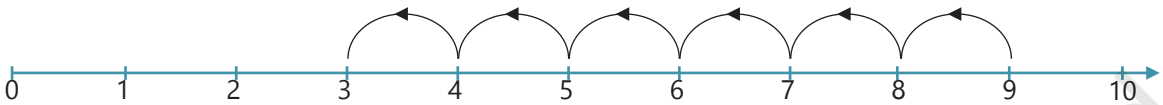
चार पावले प्रवास करावा लागेल. म्हणूनच ५+४ = ९.

(लक्षात ठेवा: **प्रारंभ संख्या + हालचाल = लक्ष्य संख्या**)

संबंधित वजाबाकी चे विधान 9 आहे – 5 = 4.

(लक्षात ठेवा: **लक्ष्य संख्या – प्रारंभ संख्या = आवश्यक हालचाल)**

आता 9 पासून 3 वर जायचे असेल तर नंबर लाईनवरून किती प्रवास करावा लागेल?



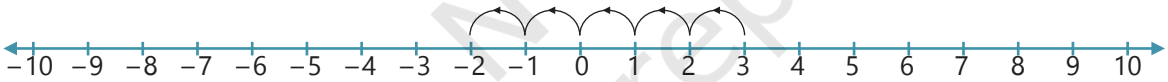
आपण 6 पावले मागे जाणे आवश्यक आहे, म्हणजे आपण -6 हालचाल केली पाहिजे. म्हणून आपण 9 + (–6) = 3 लिहितो.

(पुन्हा लक्षात ठेवा - **प्रारंभ संख्या + हालचाल = लक्ष्य संख्या**)

संबंधित वजाबाकी चे विधान 3 आहे – 9 = – 6.

(पुन्हा लक्षात ठेवा: **लक्ष्य संख्या – प्रारंभ संख्या = हालचाल आवश्यक**)

आता 3 पासून जायचे असेल तर – 2 किती अंतराचा प्रवास करावा लागेल?



प्रवास करायलाच हवा – ५ पावले, म्हणजे ५ पावले मागे. अशा प्रकारे, 3 + (– 5) = – 2. संबंधित वजाबाकी चे विधान पुढीलप्रमाणे :- 2 – 3 = – 5.

हे शोधून काढा

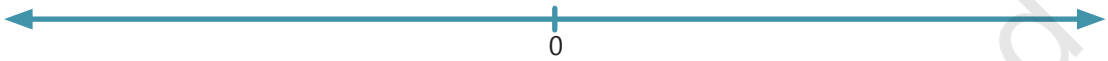
1. वरील संख्या रेषेवर 3 पॉझिटिव्ह नंबर आणि 3 निगेटिव्ह नंबर मार्क करा.
2. खालील बॉक्समध्ये वरील 3 चिन्हांकित नकारात्मक आकडे लिहा: ☐ ☐ ☐

© NCERT not to be republished

3. $2 > -3$ आहे का? का? $-2 < 3$? आहे का? का?
4. याचे उत्तर काय असेल? a. $-5+0$ b. $7+(-7)$ c. $-10+20$ d. 10-20 e. $7-(-7)$ f. $-8-(-10)$?

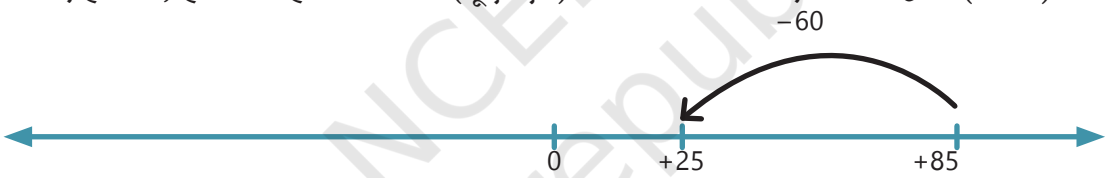
निशान नसलेल्या संख्या रेषेचा वापर करून बेरीज आणि वजाबाकी

जसे की तुम्ही वर दिलेल्या संख्या रेषेचा वापर करून लहान संख्यांचे बेरीज, वजाबाकी आणि तुलना करू शकता, तसेच मोठ्या संख्यांसाठी 'अनंत संख्या रेषा'ची कल्पना करून किंवा 'निशान नसलेली संख्या रेषा' काढून हे करू शकता:



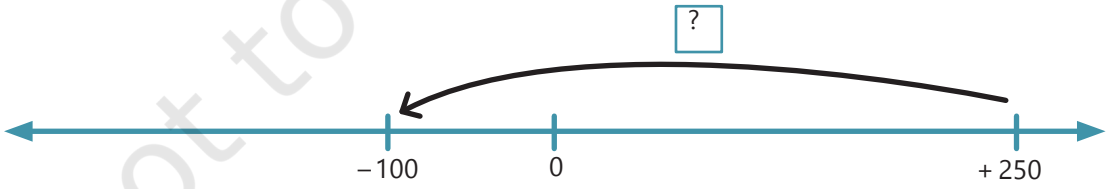
ही रेषा फक्त शून्याची स्थिती दर्शवते. इतर संख्या दर्शवलेल्या नाहीत. पूर्णांकांची बेरीज आणि वजाबाकी करण्यासाठी ही निशान नसलेली संख्या रेषा वापरणे सोयीचे ठरू शकते. तुम्ही संख्या रेषेचा माप आणि त्यावरील संख्यांचे स्थान दर्शवू शकता किंवा त्याची फक्त कल्पना करू शकता

उदाहरणार्थ, ही अचिन्हित संख्या रेषा (यूएनएल) अतिरिक्त समस्या दर्शविते: $85 + (-60) = ?$



मग आपण कल्पना करू शकतो की $85 + (-60) = 25$.

पुढील निशान नसलेली संख्या रेषा (UNL) एक वजाबाकी समस्या दर्शवते, जी हरवलेला बेरीज घटक म्हणूनही लिहिता येते: $(-100) - (+250) = ?$ किंवा $250 + ? = -100$..



मग आपण कल्पना करू शकतो की या समस्येत $? = -350$.

या प्रकारे, तुम्ही निशान नसलेल्या संख्या रेषेचा वापर करून कागदावर किंवा मनातच सकारात्मक आणि नकारात्मक संख्यांवर बेरीज आणि वजाबाकीची गणना करू शकता.

© NCERT not to be republished

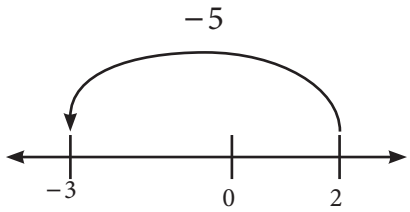
या समीकरणांचे मूल्यमापन करण्यासाठी अचिन्हित संख्या रेषा वापरा:

a. $-125 + (-30) =$ _____

b. $+105 - (-55) =$ _____

c. $+80 - (-150) =$ _____

d. $-99 - (-200) =$ _____



वजाबाकीचे बेरीजमध्ये रूपांतर करणे आणि वजाबाकीमध्ये जोडणे

लक्ष्य मजला – सुरुवातीचा मजला = आवश्यक हालचाल

किंवा

लक्ष्य मजला = सुरुवातीचा मजला + आवश्यक हालचाल

जर आपण 2 वर असू आणि –3 वर जायचे असेल, तर आवश्यक हालचाल काय आहे?

पहिली पद्धत : संख्या रेषेकडे पाहिल्यास, आपल्याला –5 (म्हणजेच 5 पावले मागे) हलावे लागेल.

म्हणून, $-3 - 2 = -5$. आवश्यक हालचाल –5 आहे..

दुसरा उपाय: 2 वरून –3 पर्यंतचा प्रवास दोन भागांत विभागा.

a. 2 वरून 0 पर्यंत, हालचाल = $0 - 2 = -2$.

b. 0 वरून –3 पर्यंत, हालचाल = $-3 - 0 = -3$.

एकूण हालचाल = $-3 + (-2) = -5$.

दोन रंगीत संकेतांकडे पाहा. दुसऱ्या संकेतात वजाबाकी नाही!

या प्रकारे, आपण नेहमी वजाबाकीला बेरीजमध्ये बदलू शकतो जे संख्या वजा केली जाते ती तिच्या उलट संख्येने बदलून त्याऐवजी बेरीज करता येते.

त्याचप्रमाणे, जी संख्या बेरीज केली जाते ती तिच्या उलट संख्येने बदलून वजाबाकी करता येते या प्रकारे, आपण नेहमी बेरीजला वजाबाकीतही बदलू शकतो.

उदाहरणे:

a. $(+7) - (+5) = (+7) + (-5)$

b. $(-3) - (+8) = (-3) + (-8)$

c. $(+8) - (-2) = (+8) + (+2)$

d. $(+6) - (-9) = (+6) + (+9)$

© NCERT not to be republished

10.2 टोकन मॉडेल

बेरीजसाठी टोकन वापरणे

बेलाच्या मजल्यांच्या इमारतीत लिफ्टमध्ये असलेला परिचर कंटाळलेला आहे. स्वतःला मनोरंजन करण्यासाठी, तो एक खोका ठेवतो ज्यात भरपूर धन (लाल) आणि ऋण (काळे) टोकन असतात. प्रत्येक वेळी तो '+' बटण दाबतो, तेव्हा तो एका धन टोकनला खोक्यातून काढून आपल्या खिशात ठेवतो. त्याचप्रमाणे, प्रत्येक वेळी तो '–' बटण दाबतो, तेव्हा तो एका ऋण टोकनला खोक्यातून काढून आपल्या खिशात ठेवतो.

तो जमिनीतल्या मजल्यावर (मजला 0) रिकाम्या खिशाने सुरुवात करतो. एक तासानंतर, तो आपला खिसा तपासतो आणि त्याला ५ धन आणि ३ ऋण टोकन सापडतात. तो आता कोणत्या मजल्यावर आहे?

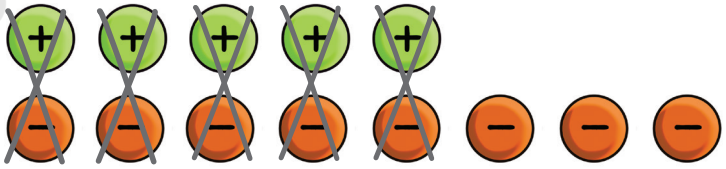
त्याने '+' बटण पाच वेळा आणि '–' बटण तीन वेळा दाबले असावे आणि (+५) + (–३) = +२. म्हणून, तो आता +२ मजल्यावर आहे.

ह्याची गणना करण्याचा आणखी एक मार्ग पुढीलप्रमाणे आहे.

धन आणि ऋण टोकन एकमेकांना रद्द करतात, कारण ह्या दोन्ही टोकनांची एकत्रित किंमत शून्य असते. त्याच्या खिशातील हे दोन टोकन म्हणजे त्याने '+' एकदा आणि '–' एकदा दाबले, आणि त्यामुळे ते परस्पर रद्द झाले. आपण असे म्हणतो की धन आणि ऋण टोकन मिळून 'शून्य जोडी' तयार करतात सर्व शून्य जोड्या काढून टाकल्यावर, उरलेले दोन धन टोकन राहतात, त्यामुळे (+५) + (–३) = +२.

आपण कोणतीही अशी बेरीज टोकनच्या मदतीने करू शकतो!

उदाहरण: + 5 आणि – 8 जोडा.



© NCERT not to be republished

चित्रावरून, आपण पाहतो की आपण पाच शून्य जोड्या काढून टाकू शकतो आणि नंतर आपल्याकडे - 3 शिल्लक राहते. म्हणून (+5) + (– 8) = – 3.

ते शोधून काढा

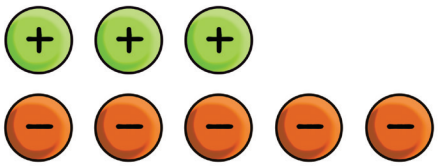
1. टोकन वापरून जोडणी पूर्ण करा.

   a. (+ 6) + (+ 4) b. (– 3) + (– 2)

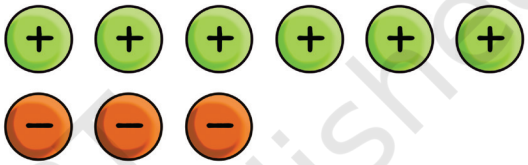
   c. (+ 5) + (– 7) d. (– 2) + (+ 6)

2. खालील दोन टोकन संचांमधील शून्य जोड्या रद्द करा. प्रत्येक प्रकरणात लिफ्ट अटेंडंट कोणत्या मजल्यावर आहे? त्या प्रत्येक प्रकरणातील संबंधित बेरीज विधान काय आहे?

a.



b.



वजाबाकीसाठी टोकन वापरणे

आपण सकारात्मक आणि नकारात्मक टोकनसह पूर्णांकांची बेरीज कशी करायची ते पाहिले आहे. आपण टोकन वापरून वजाबाकी देखील करू शकतो!

उदाहरण: आपण वजा करूया:
(+5) – (+4).

(+ 5) – (+ 4) = + 1

हे करणे सोपे आहे. निकाल पाहण्यासाठी 5 पॉझिटिव्हमधून 4 पॉझिटिव्ह घ्या.

उदाहरण: आपण वजा करूया:
(–7) – (–5).

(–7) – (–5) = –2

(–7) – (–5) हे (–7) + (+5) सारखेच आहे का?

उदाहरण: चला वजा करू: (+5) – (+6).

5 सकारात्मक टोकन ठेवा.

पण 6 सकारात्मक टोकन काढण्यासाठी पुरेसे टोकन नाहीत!

© NCERT not to be republished

या समस्येवर उपाय म्हणून, आपण एक अतिरिक्त शून्य जोडी (एक सकारात्मक आणि एक नकारात्मक) ठेवू शकतो, कारण यामुळे टोकन संचाच्या मूल्यात काहीही बदल होत नाही.

आता, आपण 6 सकारात्मक टोकन काढू शकतो!

बघा काय उरले आहे:

आपण निष्कर्ष काढतो की $(+5) - (+6) = -1$.

हे शोधून काढा

1. टोकन वापरून खालील फरक मूल्यांकन करा. आपण आता जाणून असलेल्या इतर पद्धतींसह समान परिणाम मिळतो का ते तपासा:

   a. $(+10) - (+7)$ b. $(-8) - (-4)$ c. $(-9) - (-4)$

   d. $(+9) - (+12)$ e. $(-5) - (-7)$ f. $(-2) - (-6)$

2. वजाबाकी पूर्ण करा:

   a. $(-5) - (-7)$ b. $(+10) - (+13)$ c. $(-7) - (-9)$

   d. $(+3) - (+8)$ e. $(-2) - (-7)$ f. $(+3) - (+15)$

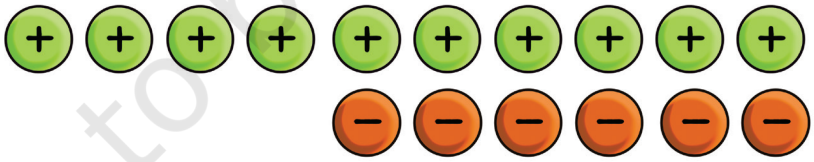
उदाहरण: $+4 - (-6)$.

4 सकारात्मक टोकनपासून सुरू करा.

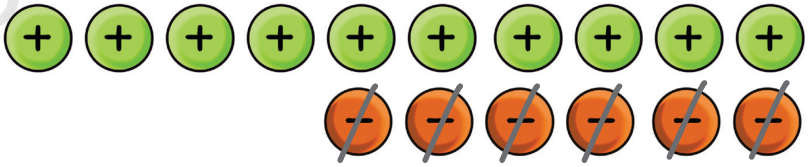
आपल्याला यापैकी 6 नकारात्मक टोकन काढावे लागतील. पण तेवढे नकारात्मक टोकन नाहीत.

हे काही अडचण नाही. आम्ही काही शून्य जोड्या वाढवतो, कारण यामुळे टोकन संचाचे मूल्य बदलत नाही.

पण किती शून्य जोड्या घालायच्या? आपल्याला 6 नकारात्मक टोकन काढायची असल्याने आम्ही 6 शून्य जोड्या ठेवतो.



आता आपण 6 नकारात्मक गोष्टी काढून टाकू शकतो:



म्हणून, $+4 - (-6) = +10$.

© NCERT not to be republished

हे शोधून काढा

1. वजा करण्याचा प्रयत्न करा: $-3-(+5)$.
   आपल्याला किती शून्य जोड्या घालाव्या लागतील? त्याचा परिणाम काय होतो?
2. टोकन वापरुन खालील गोष्टींचे मूल्यांकन करा.

a. $(-3)-(+10)$	b. $(+8)-(-7)$	c. $(-5)-(+9)$
d. $(-9)-(+10)$	e. $(+6)-(-4)$	f. $(-2)-(+7)$

10.3 इतर ठिकाणी पूर्णांक

जमा आणि शिल्लक (क्रेडिट्स आणि डेबिट्स)

समजा, तुम्ही गेल्या महिन्यात साठवलेले 100 घेऊन स्थानिक बँकेत खाते उघडता. त्यामुळे तुमचा बँक शिल्लक 100 ने सुरू होतो.

त्यानंतर, तुम्ही दुसऱ्या दिवशी नोकरीत `60 कमावता आणि ते तुमच्या खात्यात जमा करता. हे तुमच्या बँक पासबुकमध्ये 'जमा' म्हणून दाखवले जाते.

तुमची नवीन बँक शिल्लक _____ आहे.

त्याच दिवशी, तुम्ही तुमचा `30 चा वीजबिलाचा भरणा बँक खात्यातून करता. हे तुमच्या बँक पासबुकमध्ये 'डेबिट' म्हणून दाखवले जाते.

तुमची बँक शिल्लक आता _____ आहे.

पुढील दिवशी, तुम्ही व्यवसायासाठी `150 ची मोठी खरेदी करता. हे देखील डेबिट म्हणून दाखवले जाते.

आता तुमची बँक शिल्लक किती आहे? _____

हे शक्य आहे का?

होय, काही बँका तुमचे खाते शिल्लक तात्पुरते नकारात्मक होऊ देतात! काही बँका, जर तुमची शिल्लक नकारात्मक झाली, तर अतिरिक्त रक्कम 'व्याज' किंवा 'शुल्क' म्हणून आकारतात

मागील दिवशी केलेल्या तुमच्या मोठ्या खरेदीमुळे तुम्हाला पुढील दिवशी व्यवसायातून `200 मिळतात.

© NCERT not to be republished

आता तुमची शिल्लक किती आहे? _____

तुम्ही 'जमा' (credits) यांना सकारात्मक संख्या आणि 'डेबिट' (debits) यांना नकारात्मक संख्या मानू शकता तुमच्या सर्व जमा (सकारात्मक संख्या) आणि डेबिट्स (नकारात्मक संख्या) यांची बेरीज म्हणजे तुमच्या बँक खात्याची एकूण शिल्लक ही शिल्लक सकारात्मक किंवा नकारात्मक असू शकते!

सर्वसाधारणपणे, तुमच्या बँक खात्यात सकारात्मक शिल्लक ठेवणे अधिक चांगले असते!

हे शोधून काढा

1. समजा, तुमच्या बँक खात्यात सुरुवातीला 0 आहे आणि त्यानंतर तुम्ही 30, 40, आणि 50 जमा (credits) करता आणि 40, 50, आणि `60 खर्च (debits) करता. आता तुमच्या बँक खात्याची शिल्लक किती आहे?
2. समजा, तुमच्या बँक खात्यात सुरुवातीला 0 आहे आणि तुम्ही 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, आणि 128 खर्च (debits) करता आणि नंतर `256 ची एकच जमा (credit) करता. आता तुमच्या बँक खात्याची शिल्लक किती आहे?
3. सामान्यतः, बँक खात्यात सकारात्मक शिल्लक ठेवणे का चांगले असते? कोणत्या परिस्थितीत तात्पुरती नकारात्मक शिल्लक ठेवणे फायदेशीर ठरू शकते?

जसे तुम्ही पाहिले, बँकिंग आणि लेखाशास्त्राच्या जगात सकारात्मक, नकारात्मक संख्या आणि शून्य यांचा उपयोग खूप महत्त्वाचा आहे.

भौगोलिक छेद

आपण पर्वत, पठार आणि वाळवंटांसारख्या भौगोलिक वैशिष्ट्यांची उंची 'समुद्रसपाटी'पासून मोजतो. समुद्रसपाटीवरील उंची 0 मीटर असते समुद्रसपाटीपेक्षा जास्त उंचीला सकारात्मक संख्यांनी दर्शवले जाते आणि समुद्रसपाटीपेक्षा कमी उंचीला नकारात्मक संख्यांनी दर्शवले जाते.

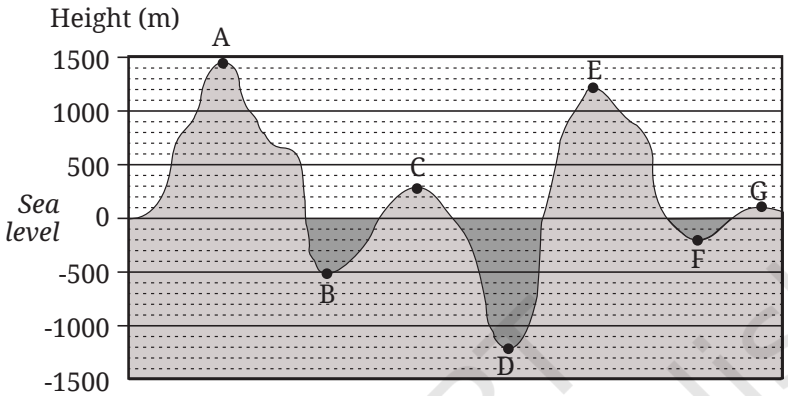
© NCERT not to be republished

हे शोधून काढा

1. भौगोलिक छेद पाहून, संबंधित उंची भरा:

   a. ____ b. ____ c. ____ d. ____

   e. ____ f. ____ g. ____



शिक्षकांसाठी सूचना

या पानातील आकृती दाखवून भौगोलिक क्रॉस सेक्शन म्हणजे काय ते विचारा. हे पृथ्वीवर एखाद्या ठिकाणी काढलेल्या उभ्या तुकड्याची कल्पना करण्यासारखे आहे. याकडे बाजूच्या दृष्टीकोनातून पाहिलं जाईल. भूगोलातील उंची व खोली मोजण्यासाठी 'समुद्रसपाटी' या संकल्पनेची चर्चा करा.

2. या भौगोलिक क्रॉस सेक्शनमधील सर्वात उंच बिंदू कोणता आहे? सर्वात खालचा बिंदू कोणता आहे?
3. आपण बिंदू A, B, ..., G यांना उंचीच्या घटत्या क्रमाने मांडू शकता का? तसेच, उंचीच्या वाढत्या क्रमाने मांडू शकता का?
4. पृथ्वीवरील समुद्रसपाटीपासून सर्वात उंच बिंदू कोणता आहे? त्याची उंची किती आहे?
5. समुद्रसपाटीच्या बाबतीत सर्वात खालचा बिंदू कोणता आहे (जमिनीवर किंवा समुद्राच्या तळावर)? त्याची उंची किती आहे? (ही उंची निगेटिव्ह असावी).

© NCERT not to be republished

तापमान

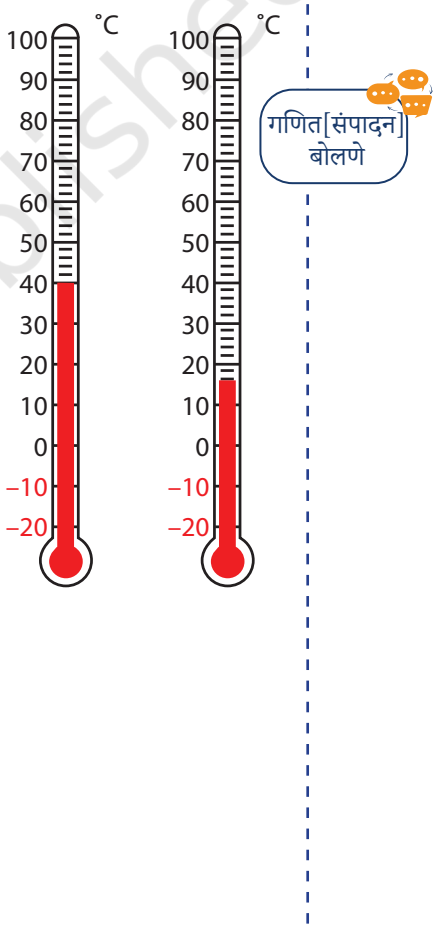
उन्हाळ्यात 'उष्णतेची लाट' येते हे आपण बातम्यांमध्ये ऐकले असेल. उन्हाळ्यात जेव्हा तुम्हाला खूप उष्णता जाणवते तेव्हा तापमान किती असेल असे तुम्हाला वाटते? हिवाळ्यात आपल्याकडे थंड किंवा थंड तापमान असते.

आपल्या भागात गेल्या वर्षी उन्हाळ्यात कमाल तापमान आणि हिवाळ्यात किमान तापमान किती होते? शोधून काढा.

जेव्हा आपण तापमान मोजतो, तेव्हा आपण सेल्सिअस चा वापर मोजमापाचे एकक (डिग्री सेल्सियस) म्हणून करतो. खालील थर्मामीटर 40 अंश सेल्सिअस आणि 15 अंश सेल्सिअस तापमान दर्शवित आहेत.

ते शोधून काढा

1. तुम्हाला माहित आहे का की भारतात अशी काही ठिकाणे आहेत जिथे तापमान 0 ° सेल्सियस च्या खाली जाऊ शकते? जाणून घ्या भारतातील अशी ठिकाणे जिथे तापमान कधीकधी 0 ° से. च्या खाली जाते या ठिकाणांमध्ये काय सामान्य आहे? तिथे थंडी का पडते आणि इतर ठिकाणी का नाही?
2. लडाखमधील लेहमध्ये हिवाळ्यात खूप थंडी पडते. नोव्हेंबरमध्ये एका दिवशी लेहमध्ये दिवस आणि रात्रीच्या वेगवेगळ्या वेळी घेतलेल्या तापमान वाचनाचा तक्ता खालीलप्रमाणे आहे. दिवस आणि रात्रीच्या योग्य वेळेशी तापमानाची जुळवाजुळव करा.



तापमान
14° से.
8° से.
−2° से.
−4° से.

वेळ
रात्री 02:00 वाजता.
रात्री 11.00 वाजता.
दुपारी 02.00 वाजे.
सकाळी 11.00 वाजता.

© NCERT not to be republished

शिक्षकांसाठी सूचना

थर्मामीटर आणि तापमान मोजण्यासाठी त्याचा वापर यावर चर्चा करा. वर्गात प्रयोगशाळेतील थर्मामीटर आणा आणि गरम पाणी व थंड पाण्याचे तापमान मोजा. विद्यार्थ्यांना दाखवा की थर्मामीटरवर 0°C च्या खालीही खुणा असतात. 0°C म्हणजे काय यावर चर्चा करा, म्हणजेच पाणी गोठण्याचा बिंदू.

10.4 पूर्णांकांसह अन्वेषण

एक पोकळ पूर्णांक ग्रीड

4	−1	−3
−3		1
−1	−1	2

5	−3	−5
0		−5
−8	−2	7

या दोन्ही ग्रीडमधील आकड्यांमध्ये काहीतरी विशेष आहे. ते काय आहे ते जाणून घेऊया.

वरची रांग:	$4+(-1)+(-3)=0$	$5+(-3)+(-5)=$ _____
खालील रांग:	$(-1)+(-1)+2=0$	$(-8)+(-2)+7=$ _____
डावा स्तंभ:	$4+(-3)+(-1)=0$	$5+0+(-8)=$ _____
उजवा स्तंभ:	$(-3)+1+2=0$	$(-5)+(-5)+7=$ _____

प्रत्येक ग्रीडमध्ये, दोन ओळींमधील संख्या (वरची रांग आणि खालची रांग) आणि दोन स्तंभांपैकी प्रत्येकातील संख्या (सर्वात डावा स्तंभ आणि उजवा स्तंभ) जोडून समान संख्या देतात. या रकमेला आपण 'बॉर्डर सम' म्हणू. पहिल्या ग्रीडची सीमा बेरीज '0' आहे.

हे शोधून काढा

1. दुसऱ्या जाळीतील गणना करूया आणि सीमा बेरीज शोधूया.

© NCERT not to be republished

2. ग्रीड पूर्ण करा जेणेकरून आवश्यक सीमा बेरीज मिळेल:

–10		
		–5
9		

सीमा बेरीज +4 आहे

6	8	
		–5
	–2	

सीमा बेरीज - 2

7		
		–5

सीमा बेरीज - 4

3. वरील शेवटच्या ग्रीडसाठी, सीमा बेरीज –4 मिळवण्यासाठी संख्या भरण्याचे एकाहून अधिक मार्ग शोधा..
4. इतर कोणते ग्रीड अनेक प्रकारे भरले जाऊ शकतात? याचे कारण काय असू शकते?
5. सीमा पूर्णांक चौकोनी कोडे तयार करा आणि आपल्या वर्गमित्रांना आव्हान द्या.

आकड्यांची अप्रतिम जाळी!

खाली काही आकडे असलेली ग्रीड आहे. जोपर्यंत नंबर शिल्लक राहत नाही तोपर्यंत दर्शविल्याप्रमाणे चरणांचे अनुसरण करा.

3	4	0	9
–2	–1	–5	4
1	2	–2	7
–7	–6	–10	–1

कुठलाही आकडा वर्तुळाकार करा

↓

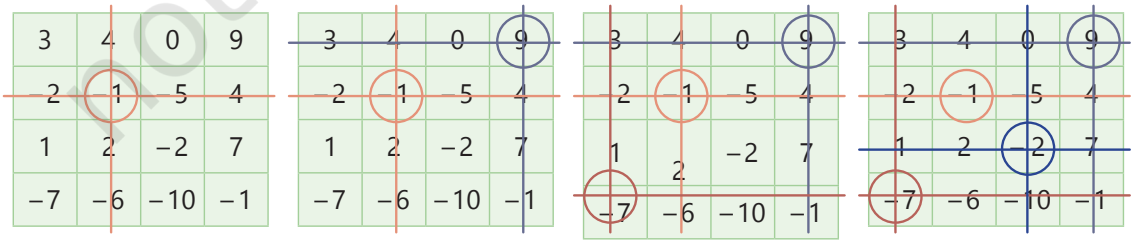
निवडलेल्या क्रमांकाची रांग आणि स्तंभ काढून टाका

↓

उरलेल्या कोणत्याही अंकाला वर्तुळात घ्या.

जेव्हा कोणतेही उरलेले अंक शिल्लक राहत नाहीत, तेव्हा थांबा. वर्तुळात घेतलेल्या संख्यांची बेरीज करा.

खालील उदाहरणात, वर्तुळाकार संख्या आहेत - 1, 9, –7, –2. जर आपण त्यांना जोडले तर आपल्याला मिळते – 1.



© NCERT not to be republished

हे शोधून काढा

1. नवीन संख्यांची निवड करून पुन्हा प्रयत्न करा. तुम्हाला कोणती बेरीज मिळाली? ती पहिल्यांदा मिळालेल्या बेरीजपेक्षा वेगळी होती का? काही वेळा अधिक प्रयत्न करून पहा!
2. हाच खेळ खालील ग्रीडसह खेळा. काय उत्तर मिळालं?

7	10	13	16
−2	1	4	7
−11	−8	−5	−2
−20	−7	−14	−11

−11	−10	−9	−8
−7	−6	−5	−4
−3	−2	−1	0
1	2	3	4

3. या ग्रीडमध्ये विशेष काय असू शकते? आकड्यांमध्ये जादू आहे की त्यांची मांडणी करण्याची पद्धत की दोन्ही? आपण असे आणखी ग्रीड बनवू शकता का?

प्रयत्न करून पहा हा

हे शोधून काढा

1. दिलेल्या जोड्यांमधील सर्व पूर्णांक वाढत्या क्रमाने लिहा.
   a. 0 आणि – 7 b. - 4 आणि 4
   c. - 8 आणि – 15 d. - ३० आणि – २३
2. अशा तीन संख्या द्या ज्यांची बेरीज – 8 येईल.
3. दोन फासे आहेत ज्यांच्या प्रत्येक बाजूवर या संख्या आहेत: – 1, 2, – 3, 4, – 5, 6. या फासे टाकल्यावर मिळू शकणारी किमान बेरीज – 10 आहे = (– 5) + (– 5) आणि कमाल बेरीज 12 आहे = (6) + (6).
   (– 10) आणि (+ 12) यामधील अशी कोणती संख्या आहे जी या फास्यांच्या संख्यांच्या बेरीजमधून मिळू शकत नाही? त्या संख्या शोधा.
4. हे सोडवा:

8 – 13	(–8) – (13)	(–13) – (–8)	(–13) + (–8)
8 + (–13)	(–8) – (–13)	(13) – 8	13 – (–8)

5. खालील वर्ष शोधा.
   a. आजपासून दीडशे वर्षांपूर्वी कोणते वर्ष होते? _____
   b. सध्याच्या वर्षापासून 2200 वर्षांपूर्वी कोणते वर्ष होते? _____
   संकेत: लक्षात ठेवा की वर्ष 0 नव्हते.

© NCERT not to be republished

c. इ.स.पू. 680 नंतरचे वर्ष काय असेल? _____

6. खालील अनुक्रम पूर्ण करा:

a. (– 40), (– 34), (– 28), (– 22), _____, _____, _____

b. 3, 4, 2, 5, 1, 6, 0, 7, _____, _____, _____

c. _____, _____, 12, 6, 1, (– 3), (– 6), _____, _____, _____

7. येथे सहा पूर्णांक कार्डे आहेत: (+ 1), (+ 7), (+ 18), (– 5), (– 2), (– 9). तुम्ही यापैकी कोणतीही कार्डे निवडून बेरीज आणि वजाबाकी वापरून एक गणिती उदाहरण तयार करू शकता.

येथे एक उदाहरण दिले आहे: (+ 18) + (+ 1) – (+ 7) – (– 2) = (+ 14). आता अशी एक अभिव्यक्ती तयार करा, ज्याचा मूल्य (– 30) च्या जवळ असेल.

8. न सकारात्मक पूर्णांकांची बेरीज नेहमीच सकारात्मक असते, पण (सकारात्मक पूर्णांक) – (सकारात्मक पूर्णांक) हा सकारात्मक किंवा नकारात्मक असू शकतो. याबाबत विचार करा:

a. (सकारात्मक) – (नकारात्मक) b. (सकारात्मक) + (नकारात्मक)

c. (नकारात्मक) + (नकारात्मक) d. (नकारात्मक) – (नकारात्मक)

e. (नकारात्मक) – (सकारात्मक) f. (नकारात्मक) + (सकारात्मक)

9. या मालिकेत एकूण 100 चिन्हे विशिष्ट पद्धतीने मांडली आहेत. त्या मालिकेचे मूल्य काय आहे??

10.5 थोडासा इतिहास

सामान्य अपूर्णांकांप्रमाणेच, सामान्य पूर्णांक (शून्यासह आणि नकारात्मक संख्यांसह) प्रथम आशियामध्ये हजारो वर्षांपूर्वी संकल्पित आणि वापरण्यात आले, आणि नंतर आधुनिक काळात संपूर्ण जगभर पसरले.

नकारात्मक संख्यांचा सर्वात पहिला ज्ञात वापर लेखाशास्त्राच्या संदर्भात आढळतो. चीनच्या महत्त्वाच्या गणितीय ग्रंथांपैकी एक, The Nine Chapters on Mathematical Art (Jiuzhang Suanshu)—जो इसवी सनाच्या पहिल्या किंवा दुसऱ्या शतकात पूर्ण झाला—यामध्ये सकारात्मक आणि नकारात्मक संख्यांचे प्रतिनिधित्व लाल आणि काळ्या दांड्यांच्या साहाय्याने केले जात असे, अगदी आपण जसे लाल आणि काळ्या टोकनच्या मदतीने त्यांचे प्रतिनिधित्व करतो तसे!

© NCERT not to be republished

प्राचीन काळात भारतातही लेखाशास्त्राची मजबूत परंपरा होती. कर्ज (क्रेडिट) आणि देयक (डेबिट) या संकल्पनांचा विस्ताराने उल्लेख कौटिल्यांनी त्यांच्या अर्थशास्त्र (इ.स.पू. 300) मध्ये केला आहे, ज्यामध्ये खात्यातील शिल्लक नकारात्मक असू शकते हेही स्पष्टपणे नमूद केले आहे. लेखाशास्त्राच्या संदर्भात नकारात्मक संख्यांचा स्पष्ट वापर अनेक प्राचीन भारतीय ग्रंथांमध्ये आढळतो. बक्षाली हस्तलिखित (इ.स. 300 च्या सुमारास) यामध्ये नकारात्मक संख्या एका विशिष्ट चिन्हाच्या सहाय्याने दर्शविली जात असे, जे संख्येनंतर लिहिले जात असे (आज आपण जसे संख्येच्या आधी चिन्ह लावतो तसे नव्हते)

सकारात्मक संख्या, नकारात्मक संख्या आणि शून्य—या तिन्ही संख्यांना समान महत्त्व देऊन त्यांच्यावर बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार आणि अगदी भागाकारसुद्धा करता येतो, हे प्रथम ब्रह्मगुप्त यांनी त्यांच्या ब्रह्मस्पुटसिद्धांत (इ.स. 628) या ग्रंथात स्पष्ट केले. ब्रह्मगुप्त यांनी सकारात्मक, नकारात्मक आणि शून्यावर विविध गणितीय क्रियांचे स्पष्ट आणि अचूक नियम मांडले. हे नियम आजही संख्यांचे आधुनिक स्वरूप समजून घेण्यासाठी वापरले जातात! क संख्या, नकारात्मक संख्या आणि शून्य यांच्यासाठी ब्रह्मगुप्त यांनी मांडलेले काही महत्त्वाचे नियम खाली दिले आहेत:

ब्रह्मगुप्त यांनी मांडलेले बेरीज करण्याचे नियम (ब्रह्मस्पुटसिद्धांत 18.30, इ.स. 628)

1. दोन सकारात्मक संख्यांची बेरीज नेहमी सकारात्मक असते. (उदा. $2 + 3 = 5$)
2. दोन नकारात्मक संख्यांची बेरीज नेहमी नकारात्मक असते. दोन नकारात्मक संख्या जोडण्यासाठी त्यांची मूळ संख्यात्मक किंमत (चिन्ह वगळून) जोडावी आणि त्यानंतर उत्तराला – चिन्ह लावावे. (उदा. $(-2) + (-3) = -5$)
3. एखादी सकारात्मक संख्या आणि नकारात्मक संख्या जोडण्यासाठी, दोन्ही संख्यांचे मोठ्या मूल्यामधून (चिन्ह न पाहता) लहान मूल्य वजा करावे आणि मोठ्या संख्येच्या चिन्हानुसार उत्तर लिहावे.
   (उदा. $-5 + 3 = -2$, $2 + (-3) = -1$, आणि $-3 + 5 = 2$)
4. कोणत्याही संख्येची आणि तिच्या व्यस्त संख्येची (inverse) बेरीज शून्य असते. (उदा. $2 + (-2) = 0$)
5. कोणत्याही संख्येच्या आणि शून्याच्या बेरीजीत उत्तर तीच संख्या येते. (उदा. $-2 + 0 = -2$ आणि $0 + 0 = 0$).

© NCERT not to be republished

ब्रह्मगुप्त यांनी मांडलेले वजाबाकी करण्याचे नियम (ब्रह्मस्पुटसिद्धांत 18.31-18.32)

1. जर मोठ्या सकारात्मक संख्येतून लहान सकारात्मक संख्या वजा केली, तर उत्तर सकारात्मक येते. (उदा. $3 - 2 = 1$)
2. जर लहान सकारात्मक संख्येतून मोठी सकारात्मक संख्या वजा केली, तर उत्तर नकारात्मक येते. (उदा. $2 - 3 = -1$)
3. नकारात्मक संख्या वजा करणे म्हणजे त्या संख्येचा संबंधित सकारात्मक संख्या म्हणून विचार करून बेरीज करणे. (उदा. $2 - (-3) = 2 + 3$)
4. कोणत्याही संख्येतून तीच संख्या वजा केली, तर उत्तर शून्य येते. (उदा. $2 - 2 = 0$ आणि $-2 - (-2) = 0$)
5. कोणत्याही संख्येतून शून्य वजा केल्यास उत्तर तीच संख्या येते. (उदा. $-2 - 0 = -2$ आणि $0 - 0 = 0$) शून्यातून कोणतीही संख्या वजा केल्यास त्या संख्येचे व्यस्त (inverse) मूल्य मिळते. (उदा. $0 - (-2) = 2$)

ब्रह्मगुप्ताचे नियम समजून घेतल्यावर तुम्ही सकारात्मक, नकारात्मक आणि शून्य अशा कोणत्याही आकड्यांसह बेरीज-वजाबाकी करू शकता!

हे शोधून काढा

1. बेला यांच्या मजेशीर इमारतीच्या संदर्भात ब्रह्मगुप्त यांचे नियम तुम्ही समजावून सांगू शकता का किंवा संख्या रेषेच्या मदतीने स्पष्ट करू शकता का?
2. प्रत्येक नियमासाठी स्वतःची उदाहरणे द्या.

ब्राह्मगुप्त हे पहिले गणितज्ञ होते ज्यांनी शून्याला एक स्वतंत्र संख्या म्हणून वर्णन केले, जी सकारात्मक आणि नकारात्मक संख्यांसह समान स्तरावर होती. तसेच, त्यांनी या सर्व संख्यांवर गणितीय क्रिया करण्यासाठी स्पष्ट नियम दिले—जे आता 'रिंग' म्हणून ओळखले जाते. यामुळे जगभरातील गणित करण्याची पद्धत बदलली

तथापि, शून्य आणि नकारात्मक संख्यांना स्वीकारण्यासाठी आणि वापरण्यासाठी जगाला अनेक शतके लागली. या संख्यांचा प्रचार 9व्या शतकात अरब जगतात झाला, जिथे त्यांचा स्वीकार आणि अधिक अभ्यास करण्यात आला. त्यानंतर, 13व्या शतकात त्या युरोपमध्ये पोहोचल्या.

© NCERT not to be republished

आश्चर्याची गोष्ट म्हणजे, 18 व्या शतकातही अनेक युरोपीय गणितज्ञांनी नकारात्मक संख्या स्वीकारल्या नव्हत्या. 18व्या शतकातील फ्रेंच गणितज्ञ लॅझार कर्नो यांनी नकारात्मक संख्यांना 'विसंगत' असे म्हटले. परंतु, काळाच्या ओघात शून्य तसेच नकारात्मक संख्या जागतिक गणित आणि विज्ञानासाठी अपरिहार्य ठरल्या आणि आता त्या सकारात्मक संख्यांसोबत समान स्तरावर महत्त्वाच्या मानल्या जातात—जसे ब्राह्मगुप्तांनी 628 CE मध्ये सांगितले आणि स्पष्टपणे मांडले होते! सर्व संख्यांवरील अंकगणितीय नियमांचे हे संकल्पनात्मककरण आधुनिक बीजगणिताच्या विकासाचा पाया बनले, ज्याबद्दल आपण पुढील वर्गांमध्ये शिकणार आहोत.

सारांश

- शून्यापेक्षा कमी असलेल्या संख्या अस्तित्वात आहेत. त्या संख्यांच्या पुढे '–' चिन्ह लावून लिहिल्या जातात (उदा., – 2) आणि त्यांना नकारात्मक संख्या म्हणतात. त्या संख्या संख्यारेषेवर शून्याच्या डावीकडे असतात.
- संख्या …, – 4, – 3, – 2, – 1, 0, 1, 2, 3, 4, … यांना पूर्णांक म्हणतात. 1, 2, 3, 4, … या संख्यांना सकारात्मक पूर्णांक म्हणतात, तर …, – 4, – 3, – 2, – 1 या संख्यांना नकारात्मक पूर्णांक म्हणतात. शून्य (0) ही संख्या ना सकारात्मक असते ना नकारात्मक.
- प्रत्येक संख्येला एक अशी संख्या असते, जिला त्या संख्येशी बेरीज केल्यास उत्तर शून्य मिळते. याला त्या संख्येचा अर्धनात्मक व्यत्यय (additive inverse) म्हणतात. उदाहरणार्थ, 7 चा अर्धनात्मक व्यत्यय – 7 आहे, तर – 543 चा अर्धनात्मक व्यत्यय 543 आहे.
- बेरीज समजून घेण्याचा एक मार्ग म्हणजे: सुरुवातीचा बिंदू + हालचाल = लक्ष्य बिंदू
- बेरीज ही हालचालींच्या एकत्रीकरणासारखीही समजू शकतो: हालचाल 1 + हालचाल 2 = एकूण हालचाल.
- वजाबाकी समजून घेण्याचा एक मार्ग म्हणजे: लक्ष्य बिंदू – सुरुवातीचा बिंदू = हालचाल

© NCERT not to be republished

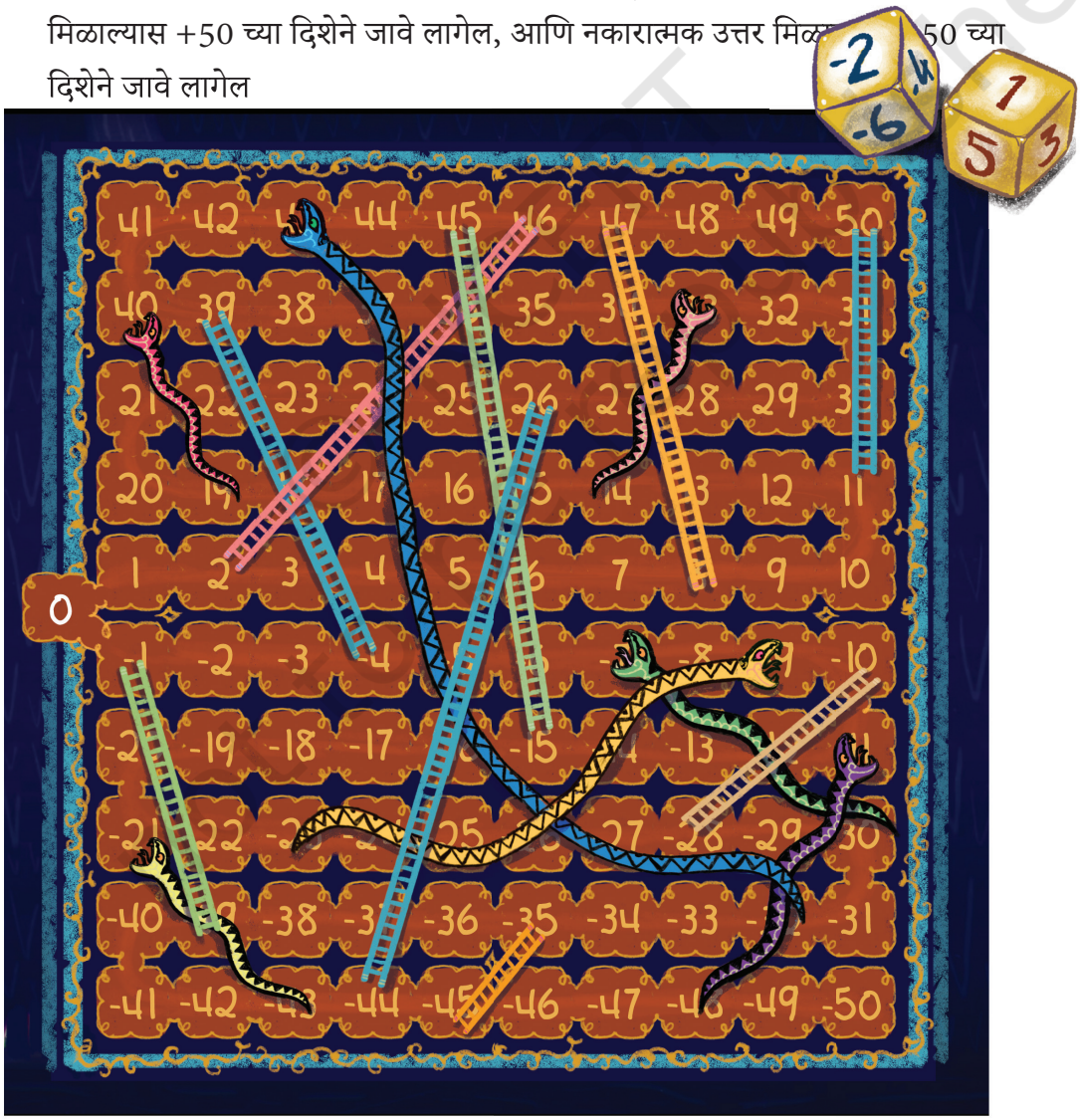
- सामान्यतः, आपण दोन संख्यांची बेरीज ब्रह्मगुप्ताच्या बेरीजच्या नियमांनुसार करू शकतो:
  a. जर दोन्ही संख्या सकारात्मक असतील, तर त्या संख्यांची बेरीज करा आणि उत्तर सकारात्मक असेल (उदा., 2 + 3 = 5).
  b. जर दोन्ही संख्या नकारात्मक असतील, तर त्या संख्यांची बेरीज करा (चिन्हे वगळून), आणि मग उत्तराला – चिन्ह द्या (उदा., – 2 + (– 3) = – 5).
  c. जर एक संख्या सकारात्मक आणि दुसरी नकारात्मक असेल, तर मोठ्या संख्येतून (चिन्ह वगळून) लहान संख्या वजा करा आणि मोठ्या संख्येचे चिन्ह उत्तराला द्या (उदा., – 5 + 3 = – 2).
  d. कोणतीही संख्या आणि तिचा अर्धनात्मक व्यत्यय (additive inverse) यांची बेरीज शून्य असते (उदा., 2 + (– 2) = 0).
  e. कोणतीही संख्या आणि शून्य यांची बेरीज तीच संख्या देते (उदा., – 2 + 0 = – 2).
- आपण दोन पूर्णांक वजा करताना, त्या उदाहरणाला बेरीजच्या रूपात बदलू शकतो आणि नंतर बेरीजचे नियम लागू करू शकतो. कोणत्याही पूर्णांकाचे वजाबाकी करणे म्हणजे त्याच्या अर्धनात्मक व्यत्यायाची (additive inverse) बेरीज करणे.
- पूर्णांकांची तुलना करता येते: … – 3 < – 2 < – 1 < 0 < +1 < +2 < +3 < … संख्यारेषेवर लहान संख्या मोठ्या संख्यांच्या डावीकडे असते.
- सकारात्मक आणि नकारात्मक संख्यांना आपण विविध संदर्भांमध्ये अर्थ देऊ शकतो. उदाहरणार्थ, त्या जमा आणि उधारी (credit आणि debit) यासारख्या दर्शवू शकतो. तसेच, सकारात्मक संख्या जमिनीच्या पृष्ठभागाच्या वरील उंची म्हणून, तर नकारात्मक संख्या जमिनीच्या पृष्ठभागाखालील खोली म्हणून दर्शवता येतात. तापमान मोजताना, शून्य डिग्री सेल्सिअसच्या वरच्या तापमानांना सकारात्मक, तर गोठणांकाच्या खालील तापमानांना नकारात्मक तापमान म्हणतात.

© NCERT not to be republished

पूर्णांक: साप आणि शिडी

नियमः

- हा दोन खेळाडूंचा खेळ आहे. प्रत्येक खेळाडूकडे 1 प्यादे (pawn) असते. दोन्ही खेळाडू 0 वरून सुरुवात करतात. खेळाडू +50 किंवा –50 वर पोहोचून जिंकू शकतात, परंतु खेळ सुरू होण्यापूर्वी किंवा खेळादरम्यान कोणते लक्ष्य निवडण्याची आवश्यकता नाही.
- प्रत्येक खेळाडू एकावेळी दोन फासे (dice) टाकतो. एका फासावर +1 ते +6 पर्यंतच्या संख्यांचा समावेश असतो, आणि दुसऱ्या फासावर –1 ते –6 पर्यंतच्या संख्यांचा समावेश असतो
- प्रत्येक वेळी दोन्ही फासे टाकल्यानंतर, खेळाडू त्यांची बेरीज किंवा वजाबाकी कोणत्याही क्रमाने करू शकतो आणि मिळालेल्या उत्तराच्या संख्येनुसार हलू शकतो. सकारात्मक उत्तर मिळाल्यास +50 च्या दिशेने जावे लागेल, आणि नकारात्मक उत्तर मिळ[illegible] 50 च्या दिशेने जावे लागेल



लर्निंग मटेरियल शीट

© NCERT not to be republished

© NCERT not to be republished

© NCERT not to be republished

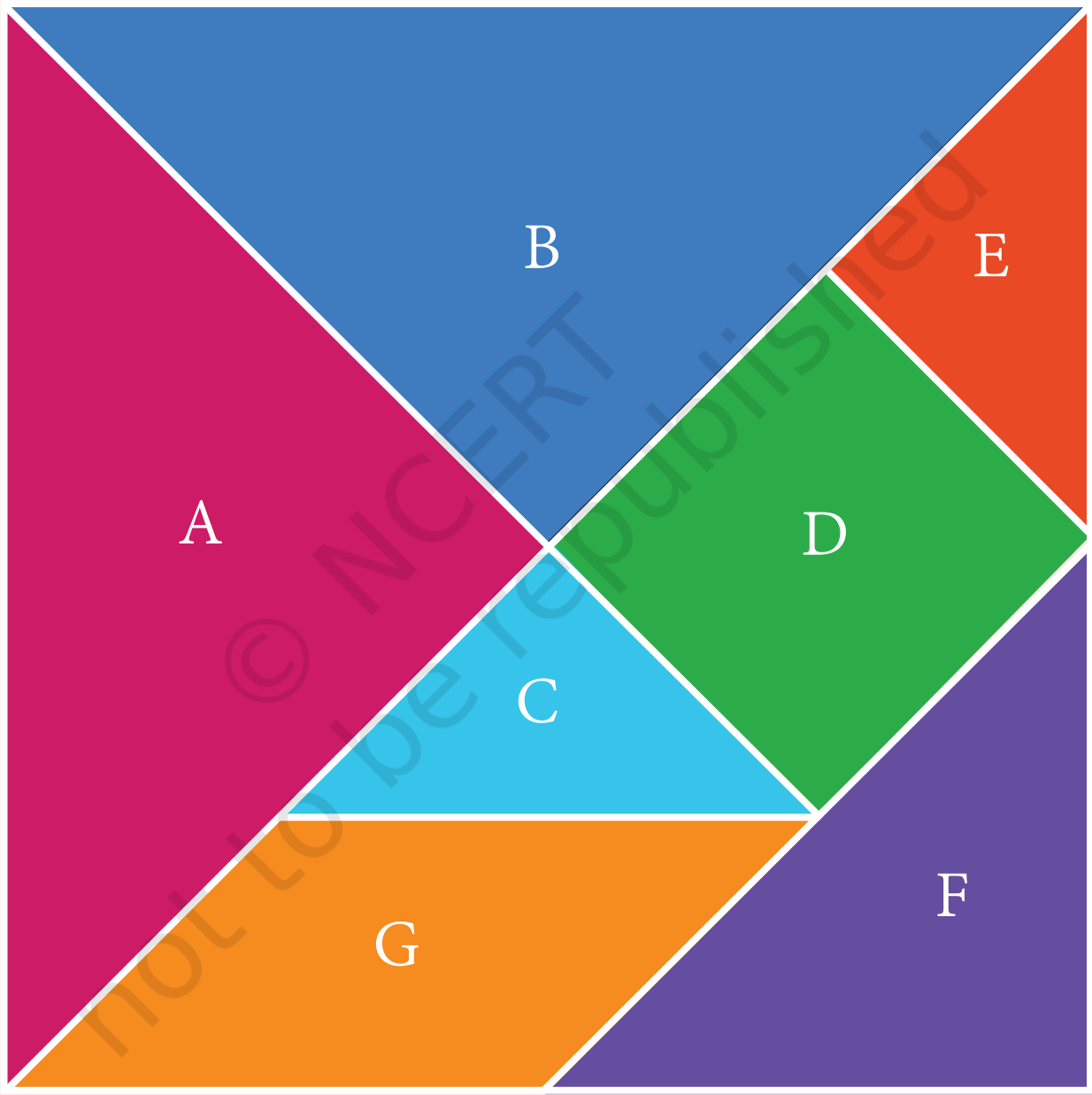
© NCERT not to be republished

© NCERT not to be republished

टँग्राम

नोट: पांढऱ्या सीमेवरील प्रत्येक आकार कापून घ्या.

टीप: प्रत्येक आकाराला पांढऱ्या काठानुसार कापा.

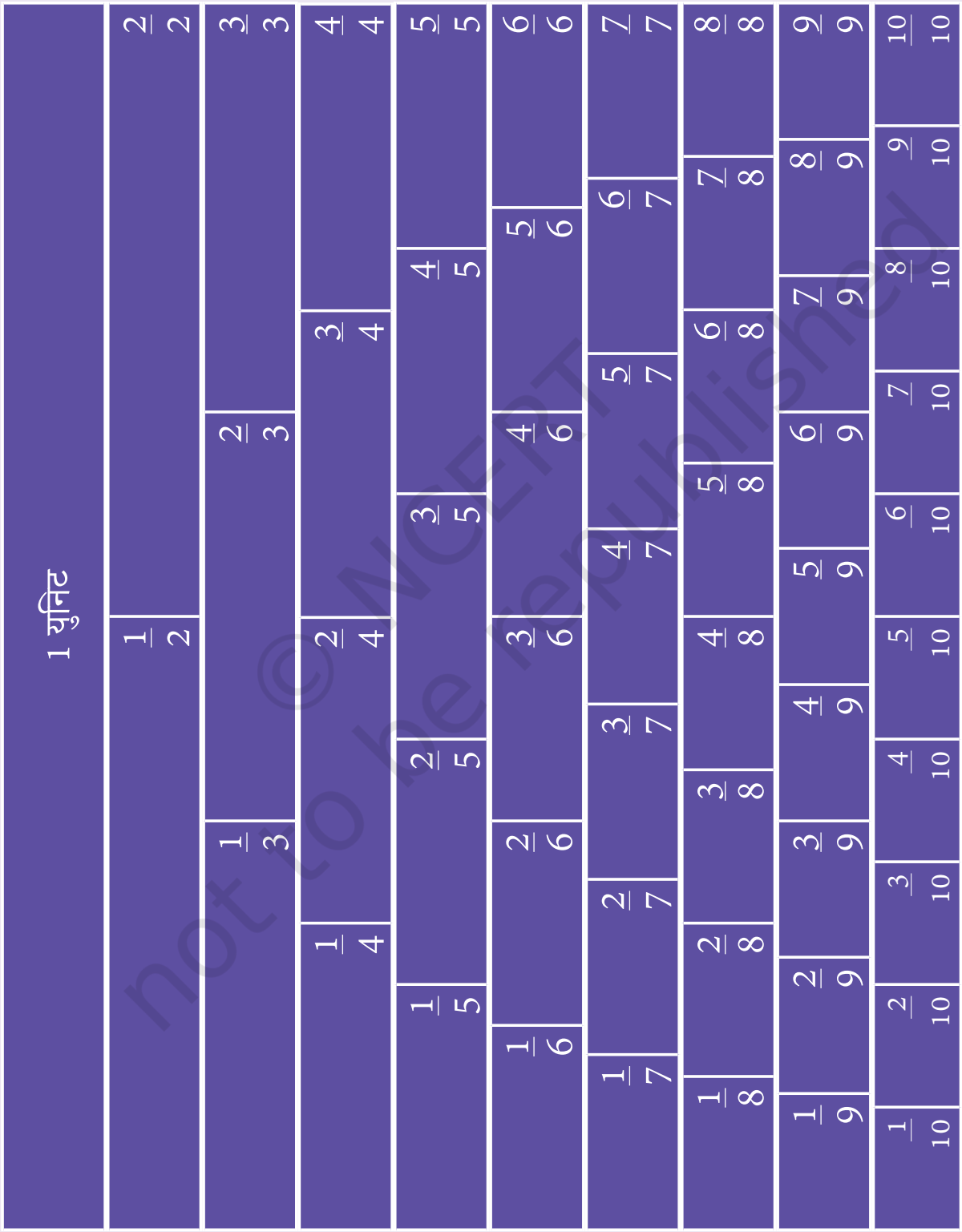


© NCERT not to be republished

© NCERT
not to be republished

फ्रॅक्शन वॉल

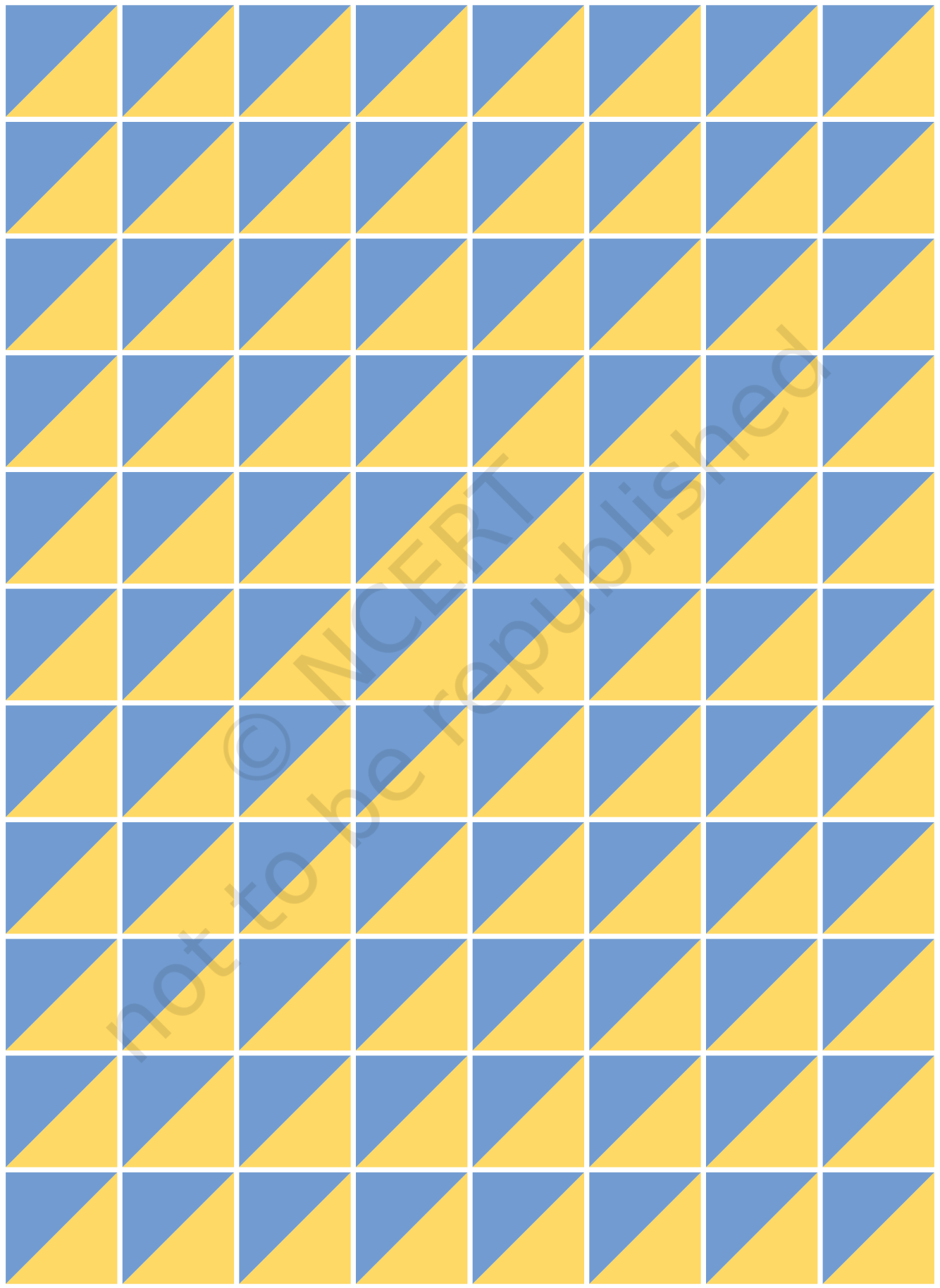
नोट: पांढऱ्या सीमेवरील प्रत्येक आकार कापून घ्या.



© NCERT not to be republished

© NCERT
not to be republished

नोट: पांढऱ्या सीमेवरील टाइल्स कापून घ्या.



© NCERT not to be republished

© NCERT
not to be republished

नोट्स

© NCERT
not to be republished

नोट्स

© NCERT
not to be republished